5. Štetje

Urška Verdinek, Matej Zajec

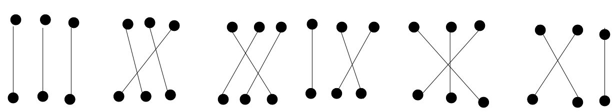
april, 2004

5.1 Štetje parov

Pogosto nas zanima, koliko objektov določenega tipa obstaja. Ta tip problemov imenujemo **problem preštetja**. V teoriji grafov je veliko takih problemov nerešenih. Na primer, koliko je neizomorfnih grafov na n-točkah? Koliko je neizomorfnih povezanih grafov na n-točkah? Koliko je neizomorfnih dreves na n-točkah?
V tem poglavju je opisanih najprej nekaj preprostih, nato pa nekaj zahtevnejših primerov.

Problem1: *Koliko je 1-faktorjev v* $\mathrm{K}_{n,n}$*?*

Najprej si problem oglejmo na konkretnem primeru.
Koliko je takih podgrafov grafa $\mathrm{K}_{3,3}$, kjer ima vsaka točka natanko eno povezavo?
Kot je razvidno iz slike1, je takih grafov 3!.



Slika 1: Podgrafi grafa $\mathrm{K}_{3,3}$, kjer ima vsaka točka natanko eno povezavo.

Izrek 1 *Število 1-faktorjev v* $\mathrm{K}_{n,n}$ *je* $n!$.

Dokaz. Imejmo n modrih točk označenih z $1, 2, 3, ..., n$ in n rdečih točk. Na modro točko 1 lahko zvežemo katerokoli izmed n rdečih točk, na modro točko

2 katerokoli izmed preostalih $n-1$ rdečih točk... S tem postopkom nadaljujemo. Za predzadnjo točko modre barve imamo 2, za zadnjo pa 1 možnost. Torej je vseh možnosti $n!$. $\square$

Problem2: *Koliko je takih podgrafov polnega grafa* K_n*, ki so izomorfni* P_k*?*

Spomnimo se, da je P_k pot dolžine k in da ima $k+1$ točk.

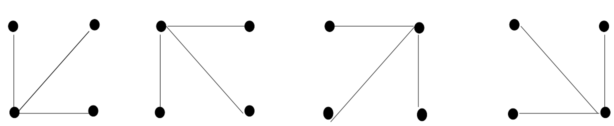
Izrek 2 *Za $k < n$ je število podgrafov polnega grafa* K_n*, ki so izomorfni* P_k*, enako* $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{2}$.

Dokaz. Pri izbiri začetne točke za pot P_k imamo n možnosti, pri izbiri druge točke $n-1$ možnosti... Za k-to točko nam tako preostane $n-k+1$ možnosti, za k+1-točko pa $n-k$ možnosti. Tako smo skupaj prešteli $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)$ poti, vendar smo vsako pot šteli dvakrat, enkrat z enaga konca, drugič z drugega. Zato je število vseh poti enako $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{2}$. $\square$

Problem3: *Koliko je takih podgrafov polnega grafa* K_n*, ki so izomorfni* $\mathrm{K}_{1,3}$*?*

Izrek 3 *Število podgrafov polnega grafa* K_n*, ki so izomorfni* $\mathrm{K}_{1,3}$ *je enako* $4\cdot\binom{n}{4}$.

Dokaz. Graf $\mathrm{K}_{1,3}$ vsebuje 4 točke, zato najprej izmed n točk grafa K_n izberemo 4 točke. To lahko storimo na $\binom{n}{4}$ načine. Pri izbranih točkah pa imamo zdaj še 4 možnosti za podgraf $\mathrm{K}_{1,3}$:



Slika 2: Podgrafi grafa K_n

Tako je število podgrafov polnega grafa K_n enako $4\cdot\binom{n}{4}$. $\square$

Rešimo sedaj isti problem še na drug način.
V $\mathrm{K}_{1,3}$ je ena točka stopnje 3 in tri točke stopnje 1. V grafu K_n imamo pri izbiri točke stopnje 3 n možnosti, preostale točke stopnje 1 pa lahko izberemo na $\binom{n-1}{3}$ načinov. Tako dobimo, da je število podgrafov polnega grafa K_n, ki so izomorfni $\mathrm{K}_{1,3}$ enako $n\cdot\binom{n-1}{3}$, kar je seveda enako $4\cdot\binom{n}{4}$.

Problem4: *Koliko 1-faktorjev je v* K_{2n}*?*
Najprej si problem oglejmo na konkretnem primeru grafa $\mathrm{K}_{2\cdot 2}$!

Slika 3: 1-faktorji v K_{2n}

Kot je razvidno iz slike3, graf K_4 vsebuje tri take podgrafe.

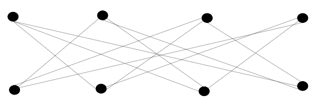
Izrek 4 *Število 1-faktorjev v* K_{2n} *je enako* $\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}$.

Dokaz. Označimo število iskanih podgrafov z $g(2n)$. Pri izbrani fiksni točki x imamo $2n-1$ možnosti, da izberemo soseda točke x. Sedaj nam ostane $2n-2$ točk in šrevilo podgrafov na teh točkah je $g(2n-2)$. Od tod dobimo zvezo $g(2n) = (2n-1)\cdot g(2n-2)$. To zvezo sedaj uporabimo še za $g(2n-2)$ in dobimo $g(2n) = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot g(2n-4)$. S tem postopkom nadaljujemo in dobimo $g(2n) = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot ... \cdot 3\cdot 2\cdot 1$, kar lahko zapišemo tudi kot $g(2n) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}$. □

Problem5: *Problem klobukov in pisem*
Problem klobukov: n mož pride v restavracijo in pri vhodu odloži svoje klobuke. Na koliko načinov lahko pri odhodu iz restavracije vzamejo klobuke, tako da nobeden ne bo imel svojega klobuka?
Problem pisem: Tajnica je napisala n pisem in na n kuvert napisala ustrezne naslove. Robi strese pisma in kuverte na tla. Na koliko načinov lahkoRobi pisma in kuverte pobere in spravi pisma v kuverte, tako, da nobeno pismo ne bo v pravi kuverti?
To je znamenit problem, znan pod imenom deranžacije.
Prevedimo ta problem v jezik teorije grafov. Imejmo graf G, ki ga dobimo iz grafa $\mathrm{K}_{n,n}$ *tako, da vsaki točki odvzamemo po eno povezavo. Koliko je 1-faktorjev vsebuje graf G ?*

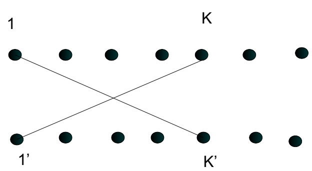
Izrek 5 *Naj bo graf G dobljen iz grafa* $\mathrm{K}_{n,n}$*, tako, da vsaki točki odvzamemo eno povezavo. Tedaj je število 1-faktorjev grafa G enako* $n!\cdot(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!})$.

Dokaz. Označimo z D_n število deranžacij n objektov. Očitno je $\mathrm{D}_1 = 0$, $\mathrm{D}_2 = 1$, $\mathrm{D}_3 = 2$. Predstavljamo si, da so točke grafa $\mathrm{K}_{n,n}$ zapisane v dveh vrsticah ena na drugo. Naj bo graf G enak kot $\mathrm{K}_{n,n}$, le da mu manjkajo navpične povezave. (Glej sliko4.)



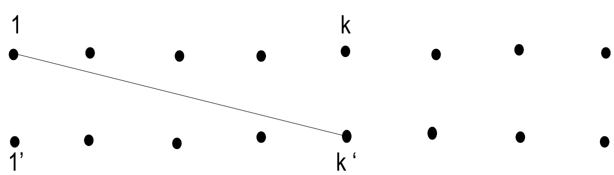
Slika 4: Graf $\mathrm{K}_{4,4}$ brez navpičnih povezav.

Najprej preštejmo, koliko je v G takih grafov, kjer ima vsaka točka natanko eno povezavo in ki vsebujejo povezavi $1k'$ in $1'k$.˙(Glej sliko5.)



Slika 5: Graf $\mathrm{K}_{n,n}$ s povezavama $1k'$ in $1'k$.

Pri fiksnem k je takih povezav D_{n-2}. Za izbiro k pa imamo $(n-1)$ možnosti. Torej je odgovor $(n-1) \cdot \mathrm{D}_{n-2}$.
Poglejmo sedaj še tiste grafe, ki vsebujejo povezavo $1k'$ in ne vsebujejo povezave $1'k$. (Glej sliko6.).



Slika 6: Graf $\mathrm{K}_{n,n}$ s povezavo $1k'$ in brez povezave $1'k$.

Pri fiksnem k je takih grafov D_{n-1}, za izbiro k pa imamo $n-1$ možnosti.Torej je tukaj odgovor $(n-1) \cdot \mathrm{D}_{n-1}$.
Tako smo dobili rekurzijo $\mathrm{D}_n = (n-1) \cdot (\mathrm{D}_{n-1} + \mathrm{D}_{n-2})$. Zapišimo to malce drugače: $\mathrm{D}_n - (n) \cdot \mathrm{D}_{n-1} = -(\mathrm{D}_{n-1} - (n-1) \cdot \mathrm{D}_{n-2})$. Sedaj bomo to rekurzijo tudi rešili.

Namesto n v rekurzijo vstavimo $n-1$ in dobimo: $\mathrm{D}_{n-1}-(n-1)\cdot\mathrm{D}_{n-2} = -(\mathrm{D}_{n-2}-(n-2)\cdot\mathrm{D}_{n-3})$. To sedaj upoštevamo v zgornji enakosti in dobimo: $\mathrm{D}_n-(n)\cdot\mathrm{D}_{n-1}=(-1)^2\cdot(\mathrm{D}_{n-2}-(n-2)\cdot\mathrm{D}_{n-3})$ in nadaljujemo do $\mathrm{D}_n-(n)\cdot\mathrm{D}_{n-1}=(-1)^{n-2}\cdot(\mathrm{D}_2-2\cdot\mathrm{D}_1)$. Sedaj v dobljeno enakost vstavimo $\mathrm{D}_1=0$ in $\mathrm{D}_2=1$ in dobimo $\mathrm{D}_n-(n)\cdot\mathrm{D}_{n-1}=(-1)^{n-2}=(-1)^n$. To je sicer še vedno rekurzija, vendar je v tej rekurziji D_n odvisen samo še od predhodnjega člena. Dobljeno enačbo delimo z $n!$ in dobimo: $\frac{\mathrm{D}_n}{n!}=\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}$.
Zapišimo dobljeno formulo za $n=2,3,...$

$\frac{\mathrm{D}_2}{2!}=\frac{\mathrm{D}_1}{1!}+\frac{1}{2!}$
$\frac{\mathrm{D}_3}{3!}=\frac{\mathrm{D}_2}{2!}-\frac{1}{3!}$
.
.
.
$\frac{\mathrm{D}_n}{n!}=\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}$

Sedaj seštejmo vse enakosti in opazimo, da se vsak D_k, razen $\mathrm{D}_1=0$ in D_n, pojavi enkrat na levi in enkrat na desni strani. Zato nam ostane $\frac{\mathrm{D}_n}{n!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}$.
Torej je število 1-faktorjev grafa G enako $n!\cdot(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!})$.
$\square$

$\frac{\mathrm{D}_n}{n!}\approx\frac{1}{e}$.

Tako je naprimer verjetnost, da pri naključnem odgovarjanju na izpitu z desetimi vprašanji na vsa vprašanja odgovorimo napačno, enaka $\frac{\mathrm{D}_{10}}{10!}\approx\frac{1}{e}$. Torej je bolj verjetno, da bomo vsaj na eno vprašanje odgovorili pravilno.

Primeri:

Primer 1: *Koliko je takih podgrafov dvodelnega grafa* $\mathrm{K}_{m,n}$*, ki so izomorfni poti* P_2*?*
Podgrafov grafa $\mathrm{K}_{m,n}$, ki so izomorfni poti P_2 je $\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{1}$

Primer 2: *Koliko je takih podgrafov polnega grafa* $\mathrm{K}_{m,n}$*, ki so izomorfni ciklu* C_4*?*
Podgrafov grafa $\mathrm{K}_{m,n}$, ki so izomorfni C_4 je $\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{2}$

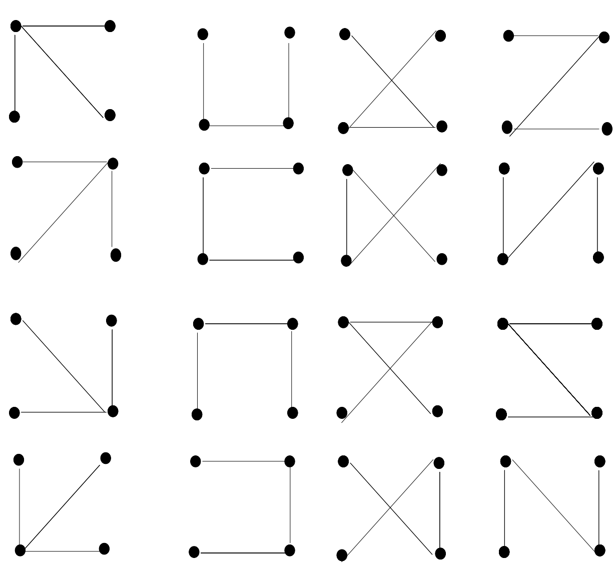
Primer 3: *Koliko je takih podgrafov polnega grafa* $\mathrm{K}_{m,n}$*, ki so izomorfni poti* P_3*?*
Podgrafov grafa $\mathrm{K}_{m,n}$, ki so izomorfni poti P_3 je $2\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{1}$

5.2 Cayleyeva formula za vpeta drevesa

Spomnimo se, da je vpeto drevo grafa G njegov podgraf, ki vsebuje vse njegove točke in je drevo. Leta 1889 je Cayley dokazal naslednji izrek:

Izrek 6 *Število vpetih dreves grafa* K_n *je* $v(\mathrm{K}_n) = n^{n-2}$.

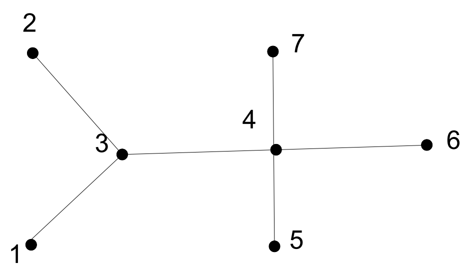
Ta zanimiv izrek ima veliko različnih dokazov. Eden enostavnejših in elegantnejših je Prufferjev dokaz, ki ga bomo sedaj tudi navedli.
Najprej direktno preverimo, da formula velja za $n = 3$ in $n = 4$. Za $n = 3$ dobimo tri vpeta drevesa, saj lahko v polnem grafu na treh točkah na tri načine odstranimo eno povezavo. Za $n = 4$ pa je vpetih dreves 16 in so prikazana na sliki7.



Slika 7: Vpeta drevesa grafa K_4 .

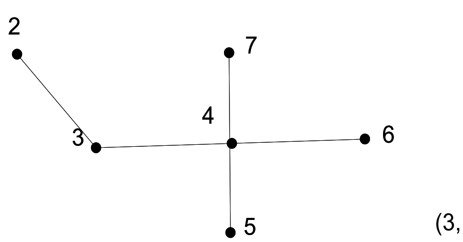
Vseh teh 16 dreves je med seboj različnih, vendar je vsako izmed njih izomorfno bodisi $\mathrm{K}_{1,3}$, bodisi P_3. Toda nas ne zanima število neizomorfnih dreves; ta problem je v splošnem nerešen. Šteti vpeta drevesa v K_n pa je dejansko enako kot šteti drevesa na n točkah, ki imajo točke označene z $1, 2, 3, ..., n$.

Najprej bomo odgovorili na vprašanje, ki na videz nima nič skupnega z našim problemom. To vprašanje se glasi: *Koliko je različnih nizov* $(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_{n-2})$ *dolžine* $b-2$ *z elementi* $1, 2, 3, ..., n$*, kjer se ti elemenri lahko ponavljajo?* Seveda je odgovor na zastavljeno vprašanje n^{n-2}.
Opazimo, da je to ravno enako številu, za katerega trdimo, da je število vseh vpetih dreves v K_n. Zato poskušajmo najti bijekcijo med množico vseh vpetih dreves v K_n in množico nizov dolžine $n-2$ z elementi $1, 2, 3, ..., n$, kjer se ti elementi lahko ponavljajo. Poskušajmo torej najprej vsako drevo opisati z nizom, tako da bomo dve različni drevesi opisali z dvema različima nizoma.



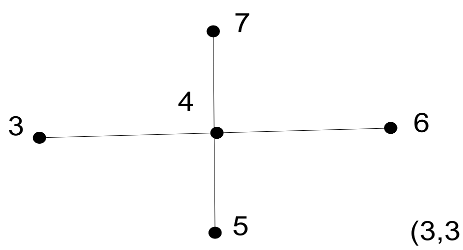
Slika 8: Drevo na sedmih točkah

Za primer vzemimo drevo na sedmih točkah iz slike 8. Najprej poiščimo točko stopnje 1 označeno z najnižjim številom. V našem primeru je to točka 1. Prvi element niza, ki bo ustrezal temu drevesu, bo sosednja točka točke 1, torej točka 3. Zbrišemo točko 1 in s postopkom nadaljujemo.(Glej sliko 9.)

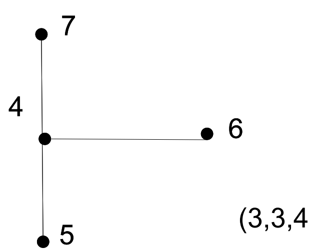


Slika 9: Drevo na sedmih točkah po prvem koraku

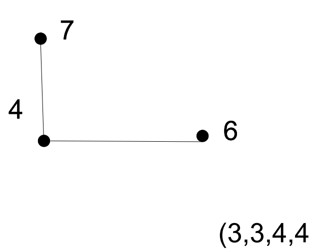
Zdaj je točka stopnje 1, ki je označena z najnižjim številom, točka 2, zato v niz napišemo njeno sosednjo točko, to je spet točka 3. Točko 2 zbrišemo. S postopkom nadaljujemo. (Glej slike 10, 11, 12, 13.)



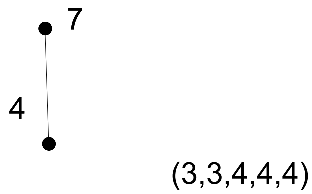
Slika 10: Drevo na sedmih točkah po drugem koraku



Slika 11: Drevo na sedmih točkah po tretjem koraku

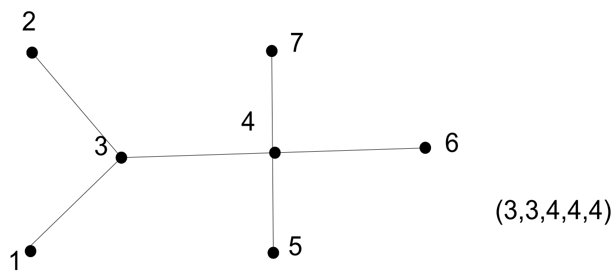


Slika 12: Drevo na sedmih točkah po četrtem koraku



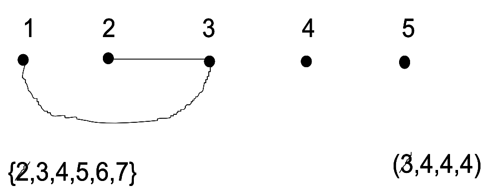
Slika 13: Drevo na sedmih točkah po petem koraku

Med drugim opazimo, da je stopnja točke 3 v začetnem drevesu enaka 3 in da se ta točka v nizu pojavi dvakrat. točka 4 ima stopnjo 4 in se v nizu pojavi trikrat. Ni težko videti, da se točka stopnje k v nizu pojavi $k-1-krat$. Torej se točke stopnje 1 v nizu sploh ne pojavijo. Tako smo našemu drevesu priredili niz $(3,3,4,4,4)$. (Glej sliko 14.)

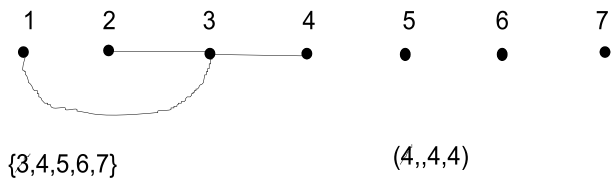


Slika 14: Drevo na sedmih točkah s prirejenim nizom

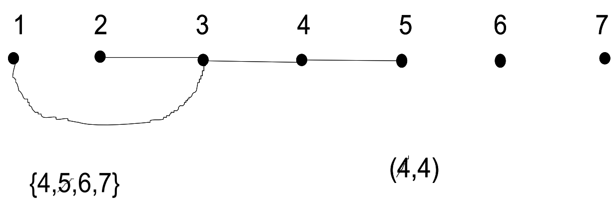
Zdaj si mislimo, da imamo niz $(3,3,4,4,4)$ in bi radi skonstruirali drevo. Vzemimo najmanjši element množice $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, ki se ne pojavi v nizu - to je točka 1. Povežimo točko 1 s točko 3. Sedaj glejmo množico $V/\{1\}$ in niz brez prve trojke. Sedaj je 2 najmanjši elemnt, ki se ne pojavi v nizu in zato ga povežemo s točko 3. Postopek nadaljujemo. (Glej slike 15, 16, 17, 18, 19.)



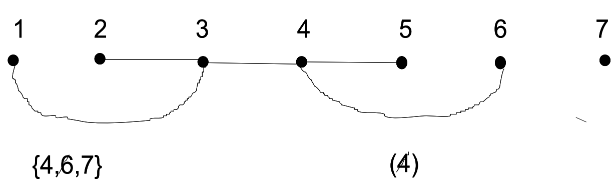
Slika 15: Prvi korak konstrukcije drevesa, ki ga določa niz



Slika 16: Drugi korak konstrukcije drevesa, ki ga določa niz

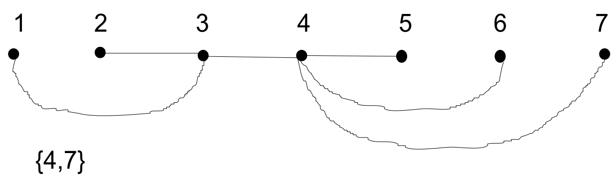


Slika 17: Tretji korak konstrukcije drevesa, ki ga določa niz



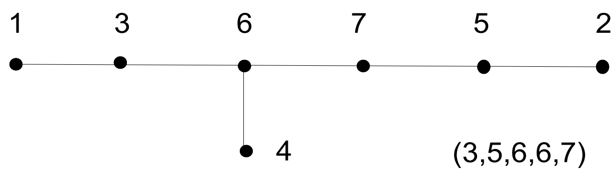
Slika 18: Četrti korak konstrukcije drevesa, ki ga določa niz

Na koncu povežemo še točki, ki sta ostali, to sta točki 4 in 7. (Glej sliko 20.)

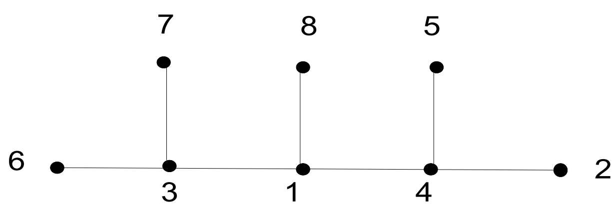


Slika 19: Peti korak konstrukcije drevesa, ki ga določa niz

Tako smo dobili drevo s katerim smo začeli.Za boljše razumevanje preveri še naslednja para:



Slika 20: Drevo za vajo

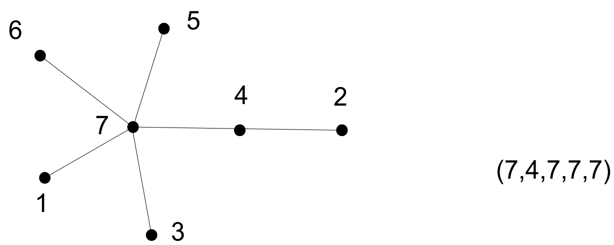


Slika 21: Drevo za vajo

Opisali smo postopek, kako iz drevesa dobiti niz in kako iz niza dobiti drevo. Potrebno je še v splošnem preveriti, da je drugi postopek res inverzen prvemu. To bomo dokazali, če dokažemo, da je posamezen korak prvega postopka inverzen ustreznemu koraku drugega postopka. V posameznem koraku prvega postopka iščemo najmanjšo točko stopnje 1, jo odstranimo z drevesa, njeno sosedo pa napišemo v niz. V ustreznem koraku drugega postopka pa vzamemo prvo število v nizu in nanj zvežemo najmanjšo točlo, ki je še nismo zvezali nikamor in ki se ne pojavi v nizu.

Primeri:

Primer 1: *Najdi niz, ki pripada drevesu na slki 22!*



Slika 22: Drevo za vajo

Primer 2: *Kateri niz pripada* P_n *in kateri* $\mathrm{K}_{1,n}$*?*
Odgovor: Niz, ki pripada P_n poiščeš tako, da na vsakem koraku daš v niz manjše krajišče. Niz, ki pripada $\mathrm{K}_{1,n}$, pa je $(2, 3, ..., n-1)$.

Primer 3: *Kako bi izniza razbral koliko je maksimalna stopnja v pripadajočem drevesu, ne da bi to drevo izpisal?*
Odgovor: Točke, ki se v nizu pojavijo največkrat, so točke z najvišjo stopnjo. Če se poajvijo $k - krat$ je njihova stopnja $k + 1$.

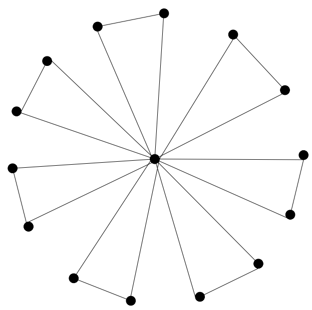
Primer 4: *Poišči drevesi, ki pripadata nizoma* $(6, 1, 1, 4)$ *in* $(1, 7, 2, 2, 2, 2)$.
Odgovor: Reši sam.
Primer 5: K_5 *vsebuje 125 vpetih dreves. Koliko jih je neizomorfnih?*
Odgovor: Tri: K, X, M

Primer 6: *Koliko neizomorfnih vpetih dreves vsebuje* K_6*?*
Odgovor: Pet.

Primer 7: *Koliko je vpetih dreves v* C_n*?*
Odgovor: Ko odstranimo eno povezavo v C_n, dobimo eno izmed vpetih dreves in na ta način dobimo tudi vsa možna vpeta drevesa. Ker pa je n povezav, je tudi možnih vpetih dreves n.

Primer 8: *Če ima n trikotnikov natanko eno skupno točko kot na sliki, tak graf označujemo z* M_n*. Slika25 prikazuje* M_7*. Koliko je v* M_n *vpetih dreves?*

Odgovor: Pri vsakem trikotniku imamo tri možnosti. Lahko vzamemo L kot



Slika 23: M_7

običajno, L obrnjen v levo, ali pa V. Torej je skupaj 3^n možnosti.

5.3 Še o vpetih drevesih

Izrek 7 *Število vpetih dreves v grafu* $K_{m,n}$ *se izračuna po formuli* $v(K_{m,n}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

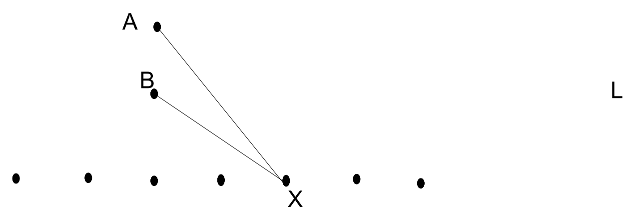
Dokaz te formule je v splošnm težak. Mi bomo dokazali samo posebna primera, ko je $m = 2$ in je n poljuben in ko je $m = 3$ in je n poljuben.

Izrek 8 *Število vpetih dreves v grafu* $K_{2,n}$ *je enako* $n \cdot 2^{n-1}$.

Dokaz. V vsakem vpetem drevesu grafa $K_{2,n}$ je pot med točkama a in b ena sama in natanko take oblike kot kaže slika 25. Za točko x s slike lahko izberemo katerokoli izmed n točk, za vsako izmed preostalih $n-1$ točk pa sta natanko dve možnosti: ali jo zvežemo s točko a ali s točo b. Torej je skupaj $n \cdot 2^{n-1}$ možnosti. □

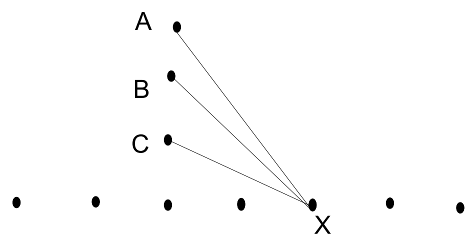
Izrek 9 *Število vpetih dreves v grafu* $K_{3,n}$ *je enako* $n^2 \cdot 3^{n-1}$.

Dokaz. Mislimo si, da imamo v grafu na eni strani točke a, b, c, ki so modre barve, na drugi strani pa n rdečih točk. Ni težko videti, da je razdalja med

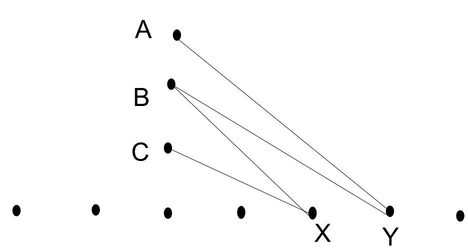


Slika 24: Graf $K_{2,n}$

poljubnima modrima točkama enaka bodisi 2 (Glej sliki 25, 26), bodisi sta dve modri točki oddaljeni za 4. Drugih možnosti ni.



Slika 25: Graf $K_{3,n}$



Slika 26: Graf $K_{3,n}$

Najprej preštejmo vsa vpeta drevesa, kjer so modre točke zvezane kot na sliki.... Za točko x s slike lahko izberemo katerokoli izmed n rdečih točk, za vsako izmed preostalih $n-1$ točk pa imamo natanko tri možnosti: ali jo zvežemo s točko a ali s točko b ali s točko c. Torej je v prvem primeru skupaj $n \cdot 3^{n-1}$ možnosti.
Preštejmo zdaj še vpeta drevesa, kjer so modre točke zvezane kot na sliki27. Za očki y in z s slike imamo $\binom{n}{2}$ možnosti. Pri vsaki izbiri y in z lahko točke a, b, c preko točk y in z zvežemo na šest načinov: za izbiro sredinske točke

imamo tri možnosti, preostali dve pa se lahko izmenjujeta. Za vsako izmed preostalih $n-2$ rdečih točk imamo, podobno kot v prejšnjem primeru, 3 možnosti. Torej v drugem primeru dobimo $6 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1}$. Zato je vseh dreves $n \cdot 3^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot 3^(n-1) = n^2 \cdot 3^(n-1)$. □

Izrek 10 *Število $v(\mathrm{W}_n)$ zadošča naslednji rekurziji: $v(\mathrm{W}_n) = 3 \cdot v(\mathrm{W}_{n-1}) - 3 \cdot v(\mathrm{W}_{n-3}) + v(\mathrm{W}_{n-4})$.*
Ko rešimo rekurzijo, dobimo $v(\mathrm{W}_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n - 2$.

Za $n = 3$ te formule ni težko preveriti, saj je $\mathrm{W}_3 = \mathrm{K}_4$, za K_4, pa smo že v dokazu izreka iz poglavja 5.2. direktno prevrili, da vsebuje 16 vpetih dreves. Če vzgornjo formulo za n vstavimo 3, je rezultat res 16.

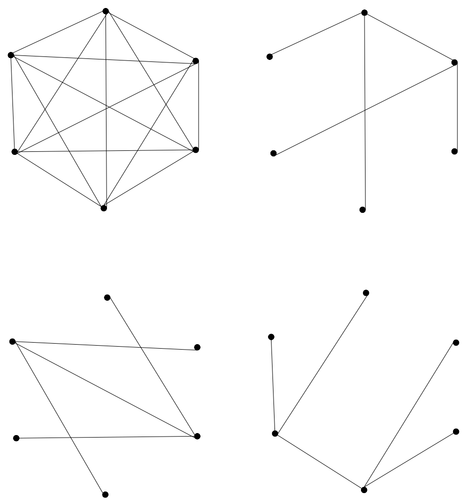
Primeri:

Primer 1: *Naj bo točka a na grafu K_n. Koliko je takih vpetih dreves, ki imajo a za robno točko?*
Odgovor: Graf K_n brez točke a je graf K_{n-1}, ki po izreku iz poglavja 5.2. vsebuje $(n-1)^{n-2}$ vpetih dreves. Vsa vpeta drevesa v K_n, ki imajo a za robno točko, pa dobimo tako, da a na vse možne načine zvežemo na vsa vpeta drevesa v K_{n-1}. Pri zbranem vpetem drevesu v K_{n-1} lahko a zvežemo na katerokoli izmed preostalih $n-1$ točk. Končen rezultat se glasi: $(n-1) \cdot (n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-1}$.

Primer 2: *Koliko različnih poti je drevesu na n točkah?*
Odgovor: Dve različni točki na drevesu natanko določata pot med nijma in če vzamemo dva različna para očk, sta tudi poti, ki ju ta dva para določata, različni. Torej je število vseh možnih poti enako $\binom{n}{2}$.

Primer 3: *Razstavi K_6 na tri vpeta drevesa, tako da bodo vsa tri drevesa poti, tako da ne bodo vsa tri drevesa poti in tako da ne bo nobeno drevo pot!*
Odgovor:

Primer 4: *Naj bo G povezan graf z natanko enim ciklom. Naj bo dolžina tega cikla r. Koliko vpetih dreves vsebuje graf G?*
Odgovor: Če grafu G odstranimo katerokoli povezavo, ki ni iz cikla, dobljen graf ni več povezan (Če bi bil, potem bi graf G imel vsaj dva cikla.). Če želimo dobiti vpeto drevo, pa moramo iz cikla odstraniti natanko eno povezavo.



Slika 27: Vpeta drevesa grafa K_6

Ker ima ta cikel r povezav, imamo r možnosti za odstranitev ene povezave. Zato graf G vsebuje r vpetih dreves.

Primer 5: *Preveri, da je število neizomorfnih vpetih dreves v grafu* $\mathrm{K}_{2,n}$ *enako* $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
Odgovor: Treba je preveriti, da je za števila, ki so oblike $n = 2 \cdot k$, neizomorfnih vpetih dreves enako k, za števila oblike $n = 2 \cdot k + 1$ pa $k + 1$. Iz dokaza prvega izreka tega poglavja vidimo, kakšne oblike mora biti graf. Med temi je neizomorfnih toliko, na kolikor načinov je mogoče razdeliti $n - 1$ točk na dve stani.