Turanov izrek
(seminarska naloga)

Vesna Mrkela, Jernej Regvat

15. april 2003

NEKAJ TERMINOLOGIJE:
Naj bo G=(V(G),E(G)) enostaven graf na n točkah. P-klika v G je poln podgraf grafa G na p točkah, ki ga označimo s K_p. Turan se je vprašal: Naj bo G enostaven graf, ki ne vsebuje p-klike. Kolikšno je največje število povezav, ki jih G lahko ima? V lahko razdelimo na paroma disjunktne podmnožice: $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{p-1}, |V_i| = n_i$ in $n = n_1 + n_2 + ... + n_{p-1}$, kjer sta dve točki grafa povezani natanko tedaj, ko ležita v dveh različnih V_i, V_j. Graf, ki ga dobimo, označimo z $K_{n_1,n_2,...,n_{p-1}}$, ki ima $\sum_{i \neq j} n_i n_j$ povezav. Če uspemo V razdeliti na takšne V_i, da bo $|n_i - n_j| \leq 1$ za vse i,j, potem dobimo maksimalno število povezav na takem grafu z n točkami. Res, predpostavimo $n_1 \geq n_2 + 2$. Če premaknemo eno točko iz V_1 v V_2, dobimo graf $K_{n_1-1,n_2+1,...,n_{p-1}}$, ki vsebuje $(n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2 = n_1 - n_2 - 1$ več povezav kot $K_{n_1,n_2,...,n_{p-1}}$. Ampak $n_1 - n_2 - 1 \geq 1$, protislovje, saj ima $K_{n_1,n_2,...,n_{p-1}}$ maksimalno število povezav (poln večdelni graf). $K_{n_1,n_2,...,n_{p-1}}$, pri čemer je $|n_i - n_j| \leq 1$, imenujemo Turanov graf (Slika 1). V posebnem primeru, če p-1 deli n, potem lahko izberemo $n_i = \frac{n}{p-1}$ za vse i, in dobimo $\binom{p-1}{2}(\frac{n}{p-1})^2 = (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$ povezav. Turanov izrek pa pravi, da je to zgornja meja za število povezav kateregakoli grafa na n točkah brez p-klike.

IZREK (Turanov, 1941): Če graf G=(V(G),E(G)) na n točkah nima p-klike, $p \geq 2$, potem je število povezav

$$|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$$

OPOMBA: Za p=2 je izrek trivialen, saj v vsakem grafu lahko najdemo podgraf na dveh točkah, ki je poln (povezava), kar pa pomeni, da vsebuje 2-kliko. Za p=3 izrek pove, da graf ne vsebuje K_3 (trikotnika) in ima največ $\frac{n^2}{4}$ povezav.

DOKAZ 1: Uporabimo indukcijo po n.
<u>n=1</u>: trivialno.
<u>n-1→n</u>:
Naj bo G graf na $V = \{v_1, ..., v_n\}$ brez p-klike z maksimalnim številom povezav. G vsebuje p-1 kliko, ker bi drugače lahko dodali povezave. Naj bo A (p-1)-klika in naj bo B=V-A. A vsebuje $\binom{p-1}{2}$ povezav. Ocenimo lahko število povezav e_B v B in število povezav $e_{A,B}$ med A in B. Vemo, da je $e_B \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{(n-(p-1))^2}{2}$. Ker G nima p-klike, je vsak $v_j \in B$ povezan z

največ p-2 točkami iz A in dobimo $e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1)$. Sledi, da je

$$|E| \leq \binom{p-1}{2} + (1 - \frac{1}{p-1})\frac{(n-(p-1))^2}{2} + (p-2)(n-p+1),$$

torej

$$|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$$

□

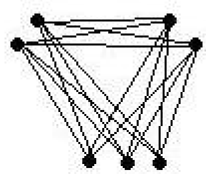
DOKAZ 2: Uporabimo strukturo Turanovih grafov. (Slika 2)
Naj bo $v_m \in V$ točka maksimalne stopnje $d_m, d_m = max_{1 \leq j \leq n} d_j$ ($d_j = d(v_j)$ stopnja točke v_j). S S označimo množico vseh sosedov točke $v_m, |S| = d_m$. Naj bo $T = V - S$. Ker G=(V(G),E(G)) ne vsebuje p-klike in je v_m povezana z vsemi točkami iz S sledi, da S ne vsebuje p-1 klike (Če bi S vseboval p-1 kliko, bi skupaj z v_m vseboval p-kliko v G). Konstruiramo graf H=(V(G),E(H)) tako, da vse povezave v S ohranimo, v T vse povezave izbrišemo in narišemo vse povezave med S in T (V(G)=V(H)=n). Torej so točke iz T paroma nepovezane. Sledi, graf H nima p klike (S vsebuje največ p-2 kliko + ena točka iz $T \to H$ vsebuje kvečjemu p-1 kliko). Naj bo d_j' stopnja točke $v_j \in H$. Če je $v_j \in S$, potem je $d_j' \geq d_j$ zaradi konstrukcije H. Če je $v_j \in T$, potem je $d_j' = |S| = d_m \geq d_j$ (zaradi izbire v_m). Torej $|E(H)| \geq |E(G)|$ (točka v_m je povezana le s točkami iz S. Vse ostale točke iz T so lahko med seboj povezane, vendar so stopnje $\leq$ stopnje točke v_m. Če te povezave odvzamemo in jim dodamo povezave z S, dobimo v T točke, ki imajo enako stopnjo kot točka v_m) in sledi, da med vsemi grafi z maksimalnim številom povezav mora biti eden oblike H. Po indukciji, graf induciran s S ima največ toliko povezav kot ustrezen graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{p-2}}$ na S. Torej

$$|E(G)| \leq |E(H)| \leq |E(K_{n_1,n_2,\ldots,n_{p-1}})| \ in \ n_{p-1} = |T|.$$

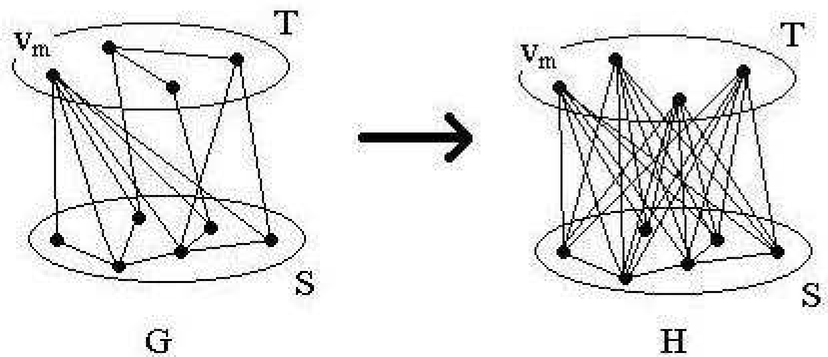
Iz tega pa sledi $|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$.

□

OPOMBA: Dokaza nam povesta še več: Naj bo t(n,p) število povezav Turanovega grafa $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{p-1}}$ na $n = n_1 + \ldots + n_{p-1}$ točkah. Potem za vsak graf H na n točkah brez p-klike velja $|E(H)| \leq t(n,p)$, pri čemer velja enakost samo za Turanov graf.



Slika 1: Graf $K_{2,2,3}$



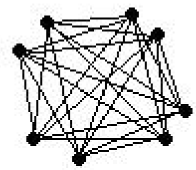
Slika 2: Dokaz 2

PRIMERI:

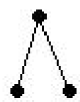
1. Nariši Turanove grafe $K_{2,2,2,2}, K_{1,2}, K_{3,3,4}$! (Slike 3, 4, 5)

2. Nariši grafe na štirih točkah, ki ne vsebuje 2-klike, 3-klike, 4-klike in ima maksimalno število povezav (Slika 6).
   Dobimo grafe $prazen\ graf, K_{2,2}, K_{1,1,2}$.

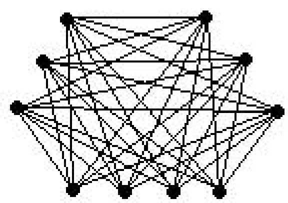
3. Določi maksimalno število povezav grafa na petih točkah, ki ne vsebuje 2-klike, 3-klike, 4-klike, 5-klike in 6-klike in nariši po enega predstavnika za vsak primer (Slika 7).
   Dobimo grafe $prazen\ graf, K_{2,3}, K_{1,2,2}, K_{1,1,1,2}, K_{1,1,1,1,1} = K_5$.



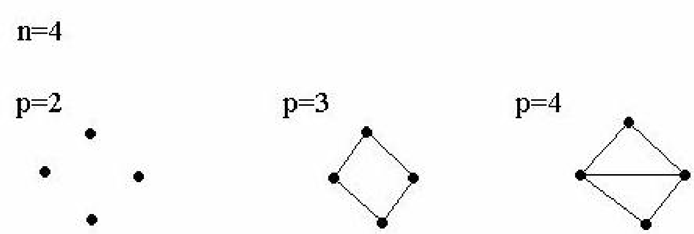
Slika 3: Graf $K_{2,2,2,2}$



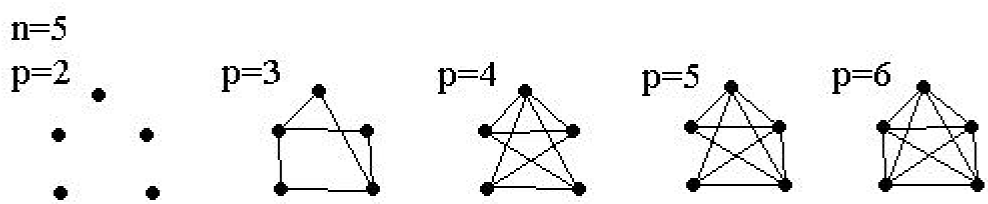
Slika 4: Graf $K_{1,2}$



Slika 5: Graf $K_{3,3,4}$



Slika 6: Primer 2



Slika 7: Primer 3