Seminarska naloga
Usmerjeni grafi

Lešnik Peter in Hojnik Petra

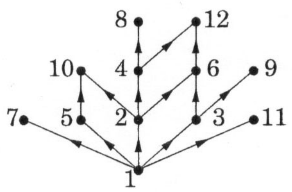
19. april 2005

Usmerjeni grafi

Definicije in primeri

Kadar iščemo grafično prezentacijo informacij o splošni relaciji na S, nas to pripelje do modela usmerjenih grafov.

Primer 1. *Za naravni števili x in y, pravimo da je x maksimalni delitelj y, če je $\frac{y}{x}$ praštevilo. Za $S \subseteq N$, je množica $R = \left\{(x, y) \in S^2 | \frac{y}{x} \in \mathbb{P}\right\}$ relacija na S. Za grafično predstavitev si za vsak element S izberemo točko v ravnini in narišemo puščico iz x v y, kadarkoli je $(x, y) \in R$.*
Primer za $S = [12]$:



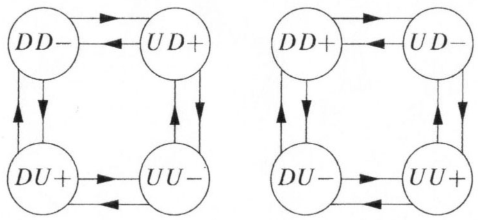
Definicija 1. *Usmerjeni graf ali digraf G je sestavljen iz množice točk $V(G)$, množice povezav $E(G)$ in funkcije, ki vsaki povezavi priredi usmerjen, urejen par točk. Prva komponenta urejenega para točk je začetek povezave in druga konec povezave; skupaj robni točki.*

Definicija 2. *V digrafu je zanka povezava, katere začetna in končna točka sovpadata. Mnogokratne povezave so povezave, ki imajo na robu enake urejene pare točk. Digraf je enostaven, če je vsak urejen par točk, začetek in konec kvečjemu ene povezave.*

V preprostem digrafu pišemo uv za povezavo z začetkom v u in koncem v v. Če imamo povezavo iz u v v, potem je v naslednik u in u je predhodnik v. To pišemo $u \to v$.

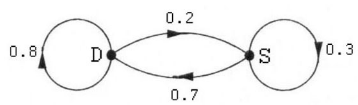
Primer uporabe 1. Stroj končnih stanj (tudi imenovan končna avtomatizacija ali diskretni sistem) ima število vseh možnih stanj. Tak sistem lahko dobimo z uporabo digrafa v katerem točke predstavljajo stanja in povezave predstavljajo vse mogoče prehode med stanji. Premiki v eno smer predstavljajo digraf ustreznega modela. Točke na robovih lahko uporabimo, da posnamejo dogodek, ki ga povzroči premik. Kadar dogodek povzroči, da sistem ostane v istem stanju imamo zanko. Kadar dve vrsti dogodkov povzročita različna premika, potem lahko uporabimo mnogokratne povezave.

Poglejmo si žarnico, ki je priklopljena na dve stikali. Prvo in drugo stikalo je lahko na primer gor ali dol in luč je lahko vkljopljena ali izklopljena. Torej imamo skupno osem stanj. V sliki spodaj predstavljajo vodoravne povezave premike, ki jih povzroči prvo stikalo. Navpične povezave pa predstavljajo premike, ki jih povzroči drugo stikalo.



Primer uporabe 2. Na robnih točkah lahko zapišemo tudi verjetnost premikov, če sistem dela naključno. Verjetnosti na robovih nam dajo vsoto 1, tak sistem pa se imenuje Markovska veriga. Metode linearne algebre lahko uporabljamo, da izračunamo del časa, ki smo ga prebili v vsakem stanju.

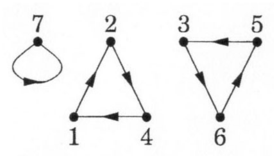
Na primer, predpostavimo, da ima vreme dve stanji: dobro in slabo. Zračne mase se premikajo dovolj počasi, torej bo vreme jutri podobno današnjemu. Na več mestih, nevihtni sistemi ne odlašajo dolgo, zato bomo imeli verjetnosti premikov kot je prikazano spodaj. Če beležimo stanja na uro namesto dnevno, potem je verjetnost, da ostanemo v istem stanju veliko večja.



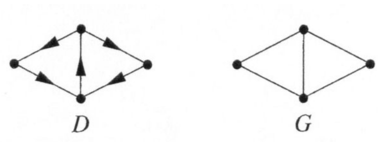
Definicija 3. *Digraf je **pot**, če je enostaven digraf, katerega točke lahko linearno uredimo tako, da imamo povezavo z začetkom v u in koncem v v natanko tedaj, kadar v takoj sledi u v množici vseh točk. **Cikel** definiramo podobno, le da točke uredimo na krožnici.*

Primer 2. *Digrafi funkcij. Poglejmo si funkcijo $f : A \to A$ z uporabo digrafov. Digraf funkcije f je enostaven graf z množico točk A in množico povezav $\{(x, f(x)) | x \in A\}$. Za vsak x kaže povezava z začetkom v x proti sliki $f(x)$.*

Če sledimo poti v grafu funkcij, potem to ustreza iteracijski funkciji. V permutaciji, je vsak element slika natanko enega elementa tako, da ima digraf funkcije en konec in en začetek za vsako točko. Zato je digraf funkcije permutacije sestavljen iz nepovezanih ciklov. Spodaj je prikazan graf funkcije za permutacijo [7].



Definicija 4. ***Temeljni graf*** *digrafa D je graf G, ki ga dobimo tako, da obravnavamo povezave od D kot neurejene pare; množica točk, množica povezav in robne točke ostanejo enake v G kot so bile v D, le da v G postanejo točke neurejeni pari.*

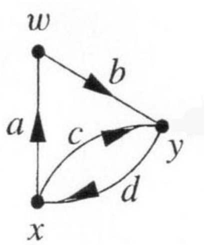


Metode in ideje iz teorije grafov ponavadi obravnavamo le na enostavnih grafih. Digrafi so uporabni tudi kot orodje za seštevanje, še posebej v primerih, ki smo jih obravnavali do sedaj.

Ko primerjamo graf z digrafom, ponavadi vzamemo G za graf in D za digraf. Če pa govorimo o enojnem digrafu ponavadi vzamemo kar G.

Definicija 5. *Definicije* ***podgrafa, izomorfizma*** *in* ***unije*** *so enake tako za grafe kot za digrafe. Naj bo $A(G)$ matrika digrafa G, v kateri števili i in j predstavljata število poti od v_i do v_j. V incidenčni matriki $M(G)$ digrafa G brez zank, postavimo $m_{i,j} = +1$, če je v_i začetek e_j in $m_{i,j} = -1$, če je v_i konec e_j.*

Primer 3. *Imejmo digraf G:*

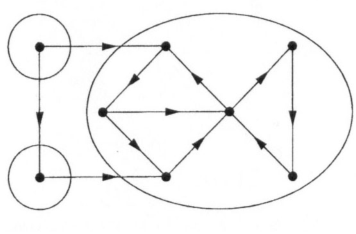


$$\mathbf{A(G)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da definiramo povezane grafe imamo dve možnosti. Lahko bi zahtevali, da bi bil temeljni graf povezan, vendar to ni preveč uporabno pri obravnavi povezanih digrafov.

Definicija 6. *Digraf je šibko povezan, če je njegov temeljni graf povezan. Digraf je močno povezan ali močan, če za vsak urejen par točk u, v, obstaja pot iz u v v. Močne komponente digrafa so njegovi maksimalni močni podgrafi.*

Primer 4. *Digraf, ki vsebuje točki x in y in je sestavljen samo iz povezave xy ter ima le pot iz x v y, nima pa poti iz y v x, ni močno povezan. Enako definiran digraf na n točkah ima n močnih komponent. Cikel pa ima le eno močno komponento. V digrafu spodaj so obkroženi poddigrafi močne komponente.*



Primer uporabe 3. Igre.
Veliko iger za dva igralca deluje na principu stroja končnih stanj. Množica točk je množica vseh možnih stanj v igri. Med x in y imamo pot, če je možen premik iz x v y oziroma če je stanje y dosegljivo iz stanja x. Naj bo W množica vseh poti, ki nas lahko pripeljejo do zmage; igralec, ki pripelje igro do tega stanja je zmagovalec. Nobena pot ne vodi iz W. Ena možnost je, da poiščemo množico S, ki jo sestavljajo paroma nesosednih točk, ki vsebujejo W, takšni da ima vsak element zunaj S pot v S. Igralec, ki pride v stanje v S, zmaga, medtem ko zgubi tisti igralec, ki mora zapustiti S.

Za primer vzemimo igro v kateri imamo na začetku dva kupčka kovancev, s katerih vsak izmed igralcev lahko odstrani del enega od teh dveh kupčkov. Igralec, ki odstrani zadnji kovanec, zmaga. Vse možne pozicije v igri so nenegativni celi številski pari (r, s). Edina zmagovalna pozicija je $(0, 0)$. Množica S je sestaljena iz pozicij $\{(r, r); r \geq 0\}$. Ker lahko na eno potezo samo ena koordinata zniža kupček, to pomeni, da ni poti znotraj S. Za vsako pot $(r, s) \notin S$ lahko igralec odmakne $|r - s|$ kovancev iz večjega kupčka, da doseže S.
Igra Nim se v splošnem začne s poljubnim številom kupčkov in kovancev, sicer pa so pravila enaka kot v zgornjem opisu. Digraf za to igro nima ciklov, zato vedno obstaja množica strategij S, ki nas pripeljejo do zmage. Če je začetna pozicija v S, potem drugi igralec zmaga (ob predpostavki, da je bila igra optimalna). V nasprotnem primeru zmaga prvi.

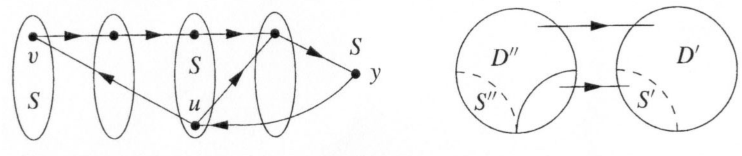
Definicija 7. ***Jedro*** *digrafa D je množica $S \subseteq V(D)$ takšna, da S ne vsebuje nobene povezave in vsaka točka zunaj S ima naslednika v S.*

Digraf, ki je lih cikel, nima jedra. Prepoved lihih ciklov kot poddigrafov nam vedno da jedro. Če to dokažemo, so točke, poti in cikli definirani z usmeritvijo. Potrebujemo številne izreke o premikanju in digrafih, ki držijo za iste dokaze kot grafi. Na primer, vsak sprehod u, v v digrafu vsebuje pot u, v in vsak zaprt lih sprehod v digrafu vsebuje lih cikel. Koncept razdalje od x do y bo najkrajša razdalja poti x, y.

Izrek 1. *(Richardson[1953])Vsak digraf, ki nima lihega cikla, ima jedro.*

Dokaz. Naj bo D digraf, ki ne vsebuje nobenega lihega cikla. Najprej obravnavamo primer, ko je D močno povezan. Imejmo poljubeno točko $y \in V(D)$ in naj bo S množica vseh točk s sodo razdaljo do y. Potem ima vsaka točka z liho razdaljo do y naslednika v S.

Če točke iz S niso paroma nesosedne potem imamo sprehod uv, kjer sta $u, v \in S$. Iz definicije S potem sledi, da je uy-pot P s sodo dolžino in vy-pot P' s prav tako sodo dolžino. Če dodamo uv na začetek P', potem ima uy-sprehod W liho dolžino. Ker je D močno povezan, ima D yu-pot Q. Z združitvijo Q z enim od sprehodov P ali W dobimo zaprt lih sprehod v D. To pa je nemogoče, saj zaprt lih sprehod vsebuje lih cikel. Torej je S jedro D.



V splošnem dokazujemo ta izrek z indukcijo po n(D).
Osnovni korak: $n(D) = 1$. Edini primer je točka brez zanke. Taka točka je hkrati tudi jedro.
Indukcijski korak: $n(D) > 1$. Ker smo za močne digrafe to že dokazali, lahko privzamemo, da D ni močan digraf. Za nekatere močne komponente D' iz D, nimamo poti od točk iz D' do točk, ki niso iz D'. Pokazali smo že, da ima D' jedro; naj bo S' jedro D'. Naj bo D" poddigraf, ki smo ga dobili tako, da smo iz D izbrisali D' in vse predhodnike iz S'. Po predpostavki, ima D" jedro; naj bo S" jedro D". Trdimo, da je $S' \cup S''$ jedro D. Ker D" nima predhodnika v S', potem nimamo poti v $S' \cup S''$. Vsaka točka iz $D'' - S''$ ima naslednika v S" in vse točke, ki niso iz $S' \cup S''$ imajo naslednika v S'. □