Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko

Petra Žigert

Vaje pri predmetu

KOMBINATORIKA

Študijsko gradivo za študente 4.letnika smeri matematika

Maribor, 2001

Kazalo

Poglavje 1

Štiri osnovna pravila preštevanja

1. Na razpolago imamo 6 različnih kuvert in 4 različne znamke. Na koliko načinov lahko:

   a) izberemo kuverto z znamko,

   b) polepimo vse 4 znamke na kuverte,

   c) polepimo vse znamke na kuverte tako, da je na vsaki kuverti največ 1 znamka?

2. Študenta imata 6 bankovcev po 500 SIT in 4 bankovce po 1000 SIT.

   a) Na koliko načinov si jih lahko razdelita?

   b) Na koliko načinov si jih lahko razdelita tako, da dobi vsak enako število bankovcev?

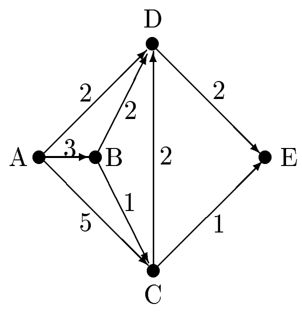
   c) Na koliko načinov si jih lahko razdelita tako, da dobita oba enako vrednost denarja?

3. Koliko različnih poti imamo od točke A do točke E (glej sliko 1.1)?

4. Profesor je pozabil dežnik ali na banki ali v lekarni ali na pošti ali pa v trgovini. Dežnik je šel iskat na vsa mesta, kjer se je tega dne zadrževal. Takoj ko ga najde, se vrne domov. Koliko različnih profesorjevih obhodov obstaja?

5. Naj bo X množica z n elementi.

   a) Koliko je vseh binarnih relacij na množici X?



Slika 1.1:

b) Koliko je vseh refleksivnih relacij na množici X?

c) Koliko je vseh simetričnih relacij na množici X?

d) Koliko je vseh refleksivnih in hkrati simetričnih relacij na množici X?

6. V 1.a je 34 učencev, v 1.b 37 in v 1.c 32.

   a) Na koliko načinov lahko izberemo 2 predstavnika razredov?

   b) Na koliko načinov lahko izberemo 2 predstavnika razredov, če morata biti iz različnih razredov?

7. Na teniškem turnirju poznamo pare osmine finala. Na koliko načinov lahko zapolnimo tekmovalno shemo?

8. Dva gusarja sta na zapuščenem otoku našla zaboj z zlatniki, srebrniki in amuleti iz slonove kosti. Nista se mogla dogovoriti, kako si naj razdelita zaklad, zato sta preučevala vse možne razporeditve, pri čemer sta za vsako porabila 10 min. To je trajalo 8 dni, 3 ure in 30 minut. Če vemo, da je bilo v zakladu največ srebrnikov ter najmanj amuletov iz slonove kosti, kolikšno je število posameznih?

9. Vse črke abecede in vseh 10 števk želimo kodirati z zaporedjem 0 in 1 dolžine k. Vsaj kolikšna mora potemtakem biti dolžina niza (kode) oz. k?

10. Morsova abeceda je način kodiranja s pomočjo pik in črtic, kjer so znaki lahko različne dolžine. Vsaj kolikšna mora biti dolžina niza, da zakodiramo 25 črk in 10 števk?

11. V učilnici je 15 računalnikov, v razredu pa je 35 učencev. Dokaži, da obstaja računalnik, za katerim bodo sedeli vsaj trije učenci.

12. Tablico 5×5 zapolnimo z $-1, 0, 1$. Dokaži, da kakorkoli napolnimo tablico, sta vsaj dve izmed izračunanih vsot po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah vedno enaki.

13. V ravnini je podanih 5 točk s celoštevilskimi koordinatami. Dokaži, da je razpolovišče vsaj ene izmed daljic med dvema točkma celoštevilska točka.

14. Dokaži, da med poljubnimi $n + 1$ celimi števili obstajata vsaj dve števili, katerih razlika je deljiva z n.

15. Dokaži, da v poljubni množice sedmih števil obstajata vsaj dve, katerih vsota ali razlika je deljiva z 10.

16. Avtoštopar je štopal 10 ur in prepotoval 45 km. V prvi uri je naredil 6 km, v zadnji pa 3 km. Dokaži, da obstajata dve zaporedni uri, v katerih je naredil vsaj 9 km.

17. V razredu je 24 fantov. Vska pozna natanko 3 dekleta. Vsako dekle pozna natanko 6 fantov. Koliko je deklet?

18. Na tekmovanju mladih talentov se je zvrstilo 45 nastopajočih. Vsak je zapel 3 pesmi in vska pesem je bila 5-krat izvedena. Koliko različnih pesmi so poslušalci slišali?

19. Študent rešuje naloge tako, da vsak dan reši vsaj eno, a na teden jih ne zmore več kot 12. Pokaži, da obstaja nekaj zaporednih dni v letu, v katerih reši študent natanko 20 nalog.

Poglavje 2

Urejene in neurejene izbire

1. Koliko besed iz 8 črk lahko sestavimo v naši abecedi, če

   a) ni nobenih omejitev,

   b) mora vsaka beseda vsebovati antanko 3 različne samoglasnike in 5 različnih soglasnikov,

   c) mora vsaka beseda vsebovati 3 ali 4 ali 5 ne nujno različnih samoglasnikov?

2. 10 turistov in 10 turistk si želi ogledati Blejski otok. Na koliko načinov si ga lahko ogledajo s 5 enakimi čolni, če morata v vsakem čolnu biti 2 moška in 2 ženski?

3. Na koliko načinov lahko razporedimo n vitezov za okroglo mizo?

4. Na sestanku je n govornikov. Na koliko načinov se lahko zvrstijo za govorniškim odrom, če govornik A ne sme biti pred govornikom B?

5. Na koncertu bo nastopilo n, $n \geq 2$, pevcev in m pevk. Na koliko načinov lahko sestavimo spored, če mora koncert začeti in končati pevec?

6. Na ŠTUK je prišlo m fantov in m deklet, od katerih n deklet noče plesati. Na koliko načinov se lahko preostali združiji v plesne pare?

7. V ravnini imamo 6 točk (A, B, C, D, E, F) od katerih nobena trojica ni kolinearna.

   a) Koliko premic določajo?

   b) Koliko trikotnikov določajo?

   c) Koliko trikotnikov s stranico CE določajo?

d) Koliko trikotnikov z ogliščem v B določajo?

8. Naj bo število $a = 3.361.400$. Koliko je deliteljev števila a?

9. Danih je n različnih praštevil. Poišči število različnih deliteljev produkta teh praštevil.

10. m študentov je šlo na absolventski izlet. Nastanili so se v hotelu z m enoposteljnimi sobami. Od teh ima le l sob balkon, i izbirčnih študentov mora imeti sobo z balkonom, j študentov pa iz zdravstvenih razlogov ne sme imeti balkona. Preostalim študentom je vseeno, v kateri sobi so. Na koliko načinov lahko študente razvrstimo v sobe?

11. Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto n belih in k črnih kroglic, če mora biti med dvema črnima vedno vsaj ena bela kroglica?

12. Koliko besed lahko sestavimo iz črk ABCDE, če mora biti B na začetku?

13. Ob železniški progi je k postaj. Koliko vozovnic moramo natisniti, da jih bomo imeli na razpolago za vse relacije?

14. Ključe delamo z rotorji na obračalcu in imamo na voljo 8 različnih globin utorov. Koliko utorov naj imajo ključi, da bomo imeli 10^6 različnih ključev?

15. Na koliko načinov lahko izmed 12 fantov in 15 deklet sestavimo 4 pare za ples?

16. Profesor je predaval n let. vsako leto pove na predavanjih k anekdot. Vsaj koliko anekdot je moral poznati?
(Reši za $n = 11$ in $k = 3$.)

Poglavje 3

Binomski in multinomski koeficienti

1. Naj bo $a = 62.774.277$. Koliko

   a) 8 mestnih,

   b) 5 mestnih

   števil lahko sestavimo iz števk števila a?

2. Na koliko načinov lahko pride kralj iz spodnjega levega kota šahovnice v zgornji desni kot, če mora biti pri vsakem premiku bližje cilju?

3. Poišči število najkrajših poti od izhodišča do vseh točk $(a, b) \in \mathbb{Z}$ v I.kvadrantu, ki ležijo pod ali na premici $x + y = 10$. Pri tem se lahko premikamo le desno in gor.

4. Naj bosta p in q nenegativni celi števili. Poišči število najkrajših poti od $(0, 0)$ do (p, q), če se premikamo le desno in gor.

5. Naj bo p praštevilo. Dokaži, da tedaj za poljubna cela števila $x_1, ..., x_k \in \mathbb{Z}$ velja

$$(x_1 + \cdots + x_k)^p = (x_1^p + \cdots x_k^p) \bmod p\,.$$

6. V razvoju multinoma poišči koeficiente pred določenimi členi:

   a) v razvoju $(a + b + c)^7$ koeficient pred členom a^3bc^3,

   b) v razvoju $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^8$ koeficient pred členom $x_1^2x_2x_4^3x_5^2$,

   c) v razvoju $(4x_1 - 3x_2 - 2x_3)^{13}$ koeficient pred členom $x_1^3x_2x_3^9$.

7. Poišči koeficiente pred x, x^2, x^5 v polinomu
$$(1-4x)^6(1+3x)^8 .$$

8. Poišči koeficiente pred $x^{10}, x^{24}, x^{27}, x^{28}$ v polinomu
$$(1+2x^6-x^8)^{20} .$$

9. Izračunaj vrednost izraza:
   a) $\sum_{n_i \geq 0} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$,
   b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$.

10. Dokaži identitete:
    a) $(-1)^r \binom{m+r}{m}\binom{m+k}{m+r} = (-1)^r \binom{m+k}{m}\binom{k}{r}$, $r = 0, 1, ..., k$,
    b) $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$,
    c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$,
    d) $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}, \forall m, n, r \in \mathbb{N}_0$.

11. Na koliko načinov lahko razvrstimo v vrsto 5 rdečih, 3 zelene in 4 modre kroglice?

12. Na koliko načinov lahko razdelimo karte za tarok
    a) med 4 igralce,
    b) med 3 igralce?

13. 8 moških se je odločilo, da bodo ustanovili oktet. Zastopani so naslednji glasovi: bas, prvi tenor, drugi tenor. Na koliko načinov lahko sestavijo oktet, če vsak izmed pevcev lahko poje katerikoli glas in sestavljajo oktet
    a) 4 basi, 2 prva tenorja, 2 druga tenorja,
    b) vsaj en bas, vsaj en prvi tenor in vsaj en drugi tenor?

14. Na koliko načinov lahko razvrstimo črke RABARBARA, če
    a) ni nobenih omejitev,
    b) se beseda mora začeti z B in končati z A?

15. Na koliko načinov lahko razvrstimo 30 učencev v 3 enakoštevilčne skupine, če
    a) prva sadi rože, druga kosi travo, tretja reže veje,
    b) vse tri kosijo travo?

16. Na koliko načinov lahko izmed 52 kart izberemo 5 kart tako, da je med njimi vsaj en pik?

Poglavje 4

Pravilo vključitve in izključitve

1. Na koliko načinov lahko razporedimo črke J A Z T I M v takšno zaporedje, da ne nastopata niti podzaporedje J A Z niti podzaporedje T I ?
2. Koliko je vseh triadskih števil (t.j. s števkami 0,1,2), ki vsebujejo največ dve različni števki?
3. 8 ljudi gre na izlet s 5 avtomobili. Na koliko načinov lahko to izvedejo, če imajo vsi vozniki vozniški izpit in hočejo potovati z vsemi petimi avtomobili?
4. Po Sahari gre karavana sestavljena iz n kamel. Na koliko načinov se lahko po počitku v oazi razporedijo tako, da nobena kamela ne hodi za isto kamelo kot je hodila pred počitkom?
5. Uprava trgovske hiše je ugotovila, da je med kupci vse več tujih turistov in se je odločila, da bo poslala prodajalce v tečaj tujih jezikov. Vsak prodajalec se mora naučiti en tuj jezik. Cilj je, da se v trgovski hiši za vsakega od 9 tujih jezikov najde prodajalec, ki ga bo obvladal. Na koliko načinov lahko pošljejo prodajalce na tečaje?
6. Pri vhodu v restavracijo je vsak izmed n ljudi odložil klobuk in dežnik. Ko zapustijo restavracijo, vsak na slepo vzame en klobuk in en dežnik. Na koliko načinov se lahko zgodi, da nihče ne vzame obeh svojih stvari?
7. Naj bo $0 \leq m \leq n$. Dokaži, da je število vseh permutacij množice $\mathbb{N}_n$, ki imajo natanko m fiksnih točk enako
$$\frac{n!}{m!} \sum_{j=0}^{n-m} \frac{(-1)^j}{j!} .$$

8. Koliko števil med 1 in 600 ni deljivih z nobenim od števil 3,5 ali 7?
9. Koliko števil med 1 in 60 ni deljivih z nobenim od števil 2,3 ali 5?
10. Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 3, niso pa deljiva z nobenim od števil 2,5 ali 7?

Poglavje 5

Stirlingova števila prve in druge vrste

1. a) Poišči vse permutacije simetrične grupe S_4.
   b) Koliko permutacij sestavlja produkt k ciklov, če je $1 \leq k \leq 4$.

2. Določi $\left[{5 \atop 3}\right]$ in $\left[{7 \atop 5}\right]$.

3. V polinomu $x(x+1) \cdot ... \cdot (x+7)$ določi koeficienta pred x^6 in x^3.

4. Naj bo p polinom z vodilnim koeficientom 1, ki ima na intervalu $[-l, 0]$ $l+1$ celoštevilskih ničel. Ničla pri $-l$ je 2. stopnje, vse ostale pa so 1. stopnje. S stirlingovimi števili prve vrste izrazi koeficiente polinoma p.

5. Dokaži, da za $n \geq m \in \mathbb{N}$ velja
$$\left[{n+1 \atop m+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[{k \atop m}\right] \frac{n!}{k!} .$$

6. Na koliko načinov lahko množico s 4 elementi razbijemo na k nepraznih razredov, $1 \leq k \leq 4$.

7. Dokaži, da za $n \in \mathbb{N}$ velja
$$\left\{{n \atop 2}\right\} = 2^{n-1} - 1 .$$

8. Dokaži, da za $n \in \mathbb{N}$ velja
$$\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2} .$$

9. Dokaži, da za $n \geq m \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left\{ k \atop m \right\} = \left\{ n+1 \atop m+1 \right\} .$$

10. Dokaži, da za $n \geq k \in \mathbb{N}$ velja

$$k! \left\{ n \atop k \right\} = k^n - \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ n \atop j \right\} (k)_j .$$

11. Dokaži, da za $n \geq m \in \mathbb{N}$ velja

$$\left\{ n \atop m \right\} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m!} .$$

Poglavje 6

Porazdelitve

1. Na koliko načinov lahko zapišemo 8 kot vsoto 4 sumandov?
2. Zapiši 7 kot vsoto sumandov, izračunaj $p_3(7)$ in predstavi particije s Ferrerovim diagramom.
3. Izračunaj $p_3(9)$ in poišči tiste particije števila 9, v katerih je 3 največji sumand.
4. Poišči particije števila 9 z manj kot 4 sumandi in poišči število particij števila 12 s 3 sumandi.
5. Pokaži, da je
$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$
6. Koliko rešitev ima enačba
$$y_1 + y_2 + ... + y_k = n$$
v množici naravnih števil, če
   a) upoštevamo vrstni red rešitev,
   b) ne upoštevamo vrstnega reda rešitev?
7. Koliko različnih sumandov je v razvoju izraza
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n .$$
8. Na koliko načinov lahko 15 jajc, ki jih med seboj ne ločimo, pobarvamo s 3 barvami?
9. 10 žog želimo razvrstiti v rdeč, moder in zelen in zaboj. Na koliko načinov lahko to naredimo, če

a) nimamo nobenih omejitev,

b) mora biti v rdečem zaboju vsaj 5 žog?

10. Dokaži, da je število particij števila n, kjer je število sumandov kvečjemu m, $m \leq n$, enako številu particij števila $n + \frac{m(m+1)}{2}$ z m različnimi sumandi.

11. Poišči vse sebi-konjugirane particije števila 18.

12. Dokaži, da je

$$sp(n|\text{največji sumand} = k) = sp(n - 2k + 1|\text{največji sumand} \leq k - 1),$$

če je sp sebi-konjugirana particija. Izračunaj še $sp(33|\text{največji sumand} = 8)$.

Poglavje 7

Rekurzija

1. Poišči splošni člen Fibonaccijevega zaporedja

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 1, F_1 = 1.$$

2. Dokaži

   a) $F_2 + F_4 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$,
   b) $F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$.

3. Reši rekurzijo

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}, \quad a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7.$$

4. Reši rekurzijo

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad a_0 = 2, a_1 = 5.$$

5. V atomu se delci čudno vedejo. Opazimo, da je njihovo število v dani sekundi enako petkratnemu številu delcev izpred dveh sekund zmanjšanemu za število delcev v prejšnji sekundi in zmanjšanemu še za trikratnik števila delcev izpred treh sekund. V prvi sekundi opazovanja smo našli 1 delec, v drugi 10 in v tretji sekundi 3 delce. Koliko delcev je v atomu po eni minuti?

6. Poišči rekurzijo in jo reši za število vseh besed dolžine n, sestavljenih iz 0,1,2, kjer so prepovedane zaporedne ničle.

7. Poišči homogeno rekurzivno enačbo, katere rešitev je

$$a_n = (2n - 1) \cdot 3^n + 5 \cdot 2^n.$$

8. Reši nehomogeno rekurzijo

$$2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 2^n.$$

9. Reši nehomogeno rekurzijo

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 + 6n - 2n^2, a_0 = 2, a_1 = 4.$$

10. Poišči homogeno rekurzivno enačbo, katere rešitev je

$$a_n = 2 + 5n - (-3)^n.$$

11. Reši rekurzijo

$$a_{n+3} - a_n = 0, a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1.$$

12. Število bakterij v določeni uri je enako trikratnemu število izpred 2 ur, zmanjšanemu za dvakratnik števila izpred treh ur in še povečanemu za število v predhodni uri. V prvi uri smo našli 2 bakteriji, v drugi 7 in v treti 5. Koliko je bakterij po 10 urah?

Poglavje 8

Rodovne funkcije

1. Dokaži: Naj bo R komutativen kolobar. Tedaj je tudi $R[[x]]$ komutativen kolobar.
   ($R[[x]]$ je množica formalnih potenčnih vrst(=rodovnih funkcij) s koeficienti iz R)

2. Naj bo $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$. Dokaži, da je rodovna funkcija zaporedja (a_n)
$$G(x) = \frac{x}{1 - Ax - Bx^2}.$$

3. Poišči rodovno funkcijo za število načinov izbire urejenega para različnih elementov iz množice z n elementi.

4. Na koliko načinov lahko razdelimo 24 (enakih) bombonov med štiri otroke, če naj vsak dobi vsaj 3 in ne več kot 8 bombonov?

5. Poišči koeficienta pri x^{87} in x^{85} v izrazu
$$(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15})^{10}.$$

6. Na koliko načinov lahko 3000 enakih pisemskih ovojnic razdelimo, v paketih po 25, med štiri skupine študentov tako, da dobi vsaka skupina vsaj 150 in ne več kot 1000 pisemskih ovojnic?

7. Petim vevericam želimo razdeliti 20 orehov. Na koliko načinov lahko to naredimo,
   a) če naj ima vsaka 2 ali 4 ali 6 orehov,
   b) če naj nobena ne dobi več kot 5 in manj kot 3 orehe?

8. V ravnini je n premic, od katerih noben par ni vzporeden in nobena trojica nima skupne točke. Na koliko delov razdelijo ravnino?

Poglavje 9

Rodovne funkcije II

Catalanova števila in izračun $p(n)$

1. Dokaži trditev:

   V vsaki triangulaciji n-kotnika je $n-3$ diagonal.

2. Dokaži izrek:
$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-3} + ... + T_nT_2,$$
   če je T_n število vseh diagonalnih triangulacij n-kotnika

3. Dokaži izrek:
$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2},\ n \geq 2.$$

4. Na koliko načinov lahko bankovec za 100 guldnov zamenjamo z bankovci po 25, 10 ali 5 guldnov?

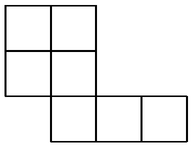
5. Koliko elementov ima množica
$$\{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid 2x + 3y = n\}$$
   pri $n = 12$. Posploši š na poljuben n.

6. Izračunaj $p(n)$ za $n = 1, 2, 3, ..., 14$.

Poglavje 10

Trdnjavski polinomi

1. Določi trdnjavski polinom za desko (glej sliko 10.1):



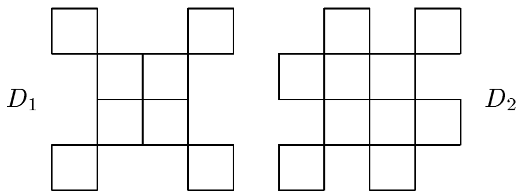
Slika 10.1:

2. Na koliko načinov lahko na desko postavimo 5 nenapadajočih se trdnjav (glej sliko 10.2)?

X				
		X		
			X	X
			X	
		X		

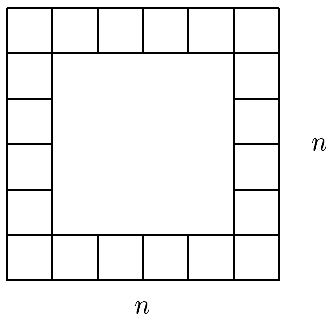
Slika 10.2:

3. Določi trdnjavska polinoma za deski D_1 in D_2. Ali znaš interpretirati dobljeni rezultat (glej sliko 10.3)?



Slika 10.3:

4. Določi trdnjavski polinom za desko (glej sliko 10.4):



Slika 10.4:

5. Sedem ljudi bi si rado izposodilo v videoteki film "Titanik", vsak za en dan. Na koliko načinov si lahko v času enega tedna kaseto izposodijo, če Anka in Boris neačrtujeta izlet za konec tedna (sobota in nedelja), Cene je zadržan v ponedeljek, Dejan gre v petek v kino, Eva obiskuje plesne vaje ob petkih in sobotah, Frenk igra ob petkih poker s prijatelji, Gašper pa ima zmeraj čas?

6. Koliko je razvrstitev 2 trdnjav na desko $(2n+1) \times 3$, ki ima obliko črke H, kjer se trdnjavi ne napadata?

7. Poišči desko, katere trdnjavski polinom je

$$T(x) = 1 + 5x + 8x^2 + 5x^3 + x^4.$$

8. Naj bo $R_n(x)$ trdnjavski polinom polne deske $n \times n$, $S_n(x)$ pa trdnjavski polinom polne deske $(n-1) \times n$.

   a) Izrazi R_n in S_n s pomočjo R_{n-1} in S_{n-1}.
   b) Izpelji rekurzijo za $R_n(x)$.

9. Za katere $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $P(x)$ trdnjavski polinom kakšne deske, če je

$$P(x) = 1 + nx + x^2.$$

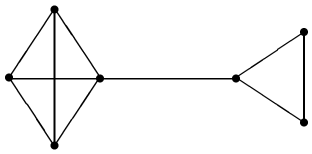
Poglavje 11

Ciklični indeks permutacijskih grup

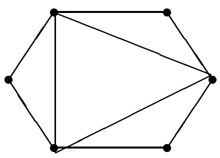
1. Poišči ciklični indeks grupe

$$G = \{(1)(2)(34), (12)(34), (23)(14), (13)(24)\}.$$

2. Poišči ciklični indeks grup S_4 in S_5.
3. Poišči ciklični indeks grupe A_5.
4. Poišči ciklični indeks ogrlice za $n = 6$.
5. Poišči ciklični indeks za tetraeder.
6. Poišči ciklični indeks grupe vrtenj kocke pri njenem delovanju na ploskvah kocke.
7. Poišči ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa G pri delovanju na točkah grafa (glej sliko 11.1).
8. Poišči ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa $K_{2,3}$ pri njenem delovanju na točkah grafa.
9. Poišči ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa G pri delovanju na točkah grafa (glej sliko 11.2).



Slika 11.1:



Slika 11.2:

Poglavje 12

Neekvivalentna barvanja in izrek Polya

1. a) Na koliko načinov lahko vrtiljak s 6 sedeži pobarvamo z dvema barvama?

   b) Na koliko načinov lahko pobarvamo sedeže vrtiljka tako, da imamo 3 bele in 3 črne sedeže?

2. a) Na koliko načinov lahko sestavimo ogrlico iz 6 biserov, če imamo na voljo črne in bele bisere?

   b) Koliko je takšnih ogrlic s po 2 črnima in 4 belimi biseri?

3. Molekula ima obliko tetraedra in v njenem centru leži atom ogljika. Na ogliščih tetraedra so lahko vezani naslednji radikali; CH_3, H, Cl, C_2H_5. Koliko različnih molekul je mogoče sestaviti?

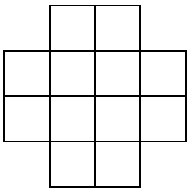
4. Pahljača ima 7 prerezov. Na koliko načinov jih lahko pobarvamo tako, da bodo trije modre barve, dva zelena in dva rdeča?

5. Iz dveh kvadratov z zarezo sestavimo obesek. Koliko različnih obeskov lahko sestavimo, če njegove ploskve pobarvamo s tremi barvami?

6. Na koliko načinov se lahko 6 angleških in 6 škotskih vitezov posede za okroglo mizo z neoznačenimi stoli, če viteze razlikujemo le po narodnosti?

7. Koliko je vseh barvanj mozaika z modro in rdečo barvo (slika 12.1)?

8. Na koliko načinov lahko pobarvamo ploskve kocke z rdečo, modro in zeleno barvo, če je ena ploskev že pobarvana s črno barvo?



Slika 12.1:

Poglavje 13

Kode in odpravljanje napak pri prenosu podatkov

1. Dokaži trditev:

   (V^n, H) je metrični prostor.

2. Dana je koda

   $$\mathcal{C} = \{0000, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1111\}\,.$$

   a) Poišči $\delta(\mathcal{C})$ in ugotovi koliko napak koda odkrije in koliko napak popravi?

   b) Ali lahko $\mathcal{C}$ razširimo z dodatno kodno besedo tako, da se δ ne spremeni?

3. Dana je koda $\mathcal{C} = \{000000, 111100, 001111, 110011\} \subset V^6$.

   a) Ali je linearna? Določi njene parametre.

   b) Koliko napak opazi? Koliko napak popravi?

   c) Prejeli smo besedo 011100. Katera beseda je bila poslana, če vemo, da je pri prenosu prišlo do ene napake?

4. Definirajmo

   $$S_2(x) = \{x \in V^n\,;\, x \text{ ima kvečjemu dve napaki}\}\,.$$

   Dokaži:

   $$S_2(x) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)\,.$$

5. Zapiši kodne besede in parametre linearne kode, ki je podana z naslednjo nadzorno matriko:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Naj bo $\mathcal{C}$ linearna koda, podana z naslednjo nadzorno matriko:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sprejeli smo besedo 110110 in vemo, da lahko pri prenosu pride do kvečjemu ene napake. Katera beseda je bila poslana?

7. Radi bi poslali 128 sporočil, pri čemer je vsako sporočilo sestavljeno iz kodnih besed dolžine 11. Kako bi konstruirali takšno kodo, če mora biti $\delta \geq 3$?

8. Dokaži trditev:

Naj bo $\mathcal{C}$ linearna koda dolžine n in dimenzije k. Če je e maksimalno število napak, ki jih $\mathcal{C}$ popravi, tedaj

$$2^{n-k} \geq 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{e}.$$

9. Največ koliko napak lahko popravi poljubna koda dolžine 17 in dimenzije 10?

10. Na Oddelku za matematiko so se odločili, da bodo vsakemu študentu matematike dodelili številko v obliki linearne besede.

    a) Poišči najmanjšo možno dimenzijo linearne kode za ta namen, če je vpisanih 53 študentov (ni nujno, da dodelimo vse kodne besede).

    b) Poišči najmanjšo možno dolžino kode tako, da bo koda popravila eno napako?