1. Naj bo $ABCD$ enakokrak trapez. Naj bo E razpolovišče daljice BC, F razpolovišče daljice CD in S presečišče daljic AE in BF. Naj bo $\vec{AB} = 3\,\vec{a}$, $\quad \vec{DC} = 2\,\vec{a}$ in $\vec{AD} = 2\,\vec{b}$. Izrazi vektor $\vec{BS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

2. Pokaži, da za paralelogram $ABCD$ velja $2\,|\vec{AB}|^2 + 2\,|\vec{AD}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2$.

3. Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ neničelen vektor in $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ poljubna vektorja. Pokaži, da je $\vec{x} = \vec{y}$ natanko takrat, ko je $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{y} \times \vec{a}$ in $\vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{y} \cdot \vec{a}$.
   Nasvet: Pokaži, da je $\vec{x} = \vec{0}$ natanko takrat, ko je $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{0}$ in $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$.

4. Premici $x + 7 = 3\,y - 11 = 2\,z$ in $x = \frac{y+14}{7} = \frac{2\,z+5}{5}$ sta nosilki krakov enakokrakega trikotnika, točka $(-2, 7, 3)$ pa leži na njegovi osnovnici. Poišči oglišča tega trikotnika.

2. kolokvij iz Algebre 1

(14.1.1999)

1. Reši sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} -5\,x_2 + 6\,x_3 + 11\,x_4 &= 16 \\ -x_1 + 2\,x_4 &= 3 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 6\,x_3 + 9\,x_4 &= 3 \\ -x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

2. Naj bo N kvadratna matrika, $m \in \mathbb{N}$ in $N^m = 0$. Pokaži, da je $I + N$ obrnljiva matrika in da je $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \cdots + N^{m-1}$.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Poišči vse take matrike B, da bo $B\,A = A^{\mathrm{T}}$.

4. Poišči vse take $x \in \mathbb{R}$, za katere spodnja matrika ni obrnljiva.

$$\begin{bmatrix} 1 & x^n & x^{n-1} & \dots & x \\ x & 1 & x^n & \dots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & x^n \\ x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1. Naj bosta $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ in $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ linearni preslikavi, ki ju v bazi $\big((1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,0), (0,0,1,1)\big)$ predstavljata matriki F oziroma G. Poišči baze za vektorske podprostore $\mathrm{im}(f)$, $\mathrm{im}(g)$, $\ker(f)$ in $\ker(g)$. Poišči determinanti matrik, ki predstavljata preslikavi f in g v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$.

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & -1 & -6 \\ 4 & -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Obravnavaj sistem enačb glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (1+a)\,x + y + z &= 1 \\ x + (1+a)\,y + z &= a \\ x + y + (1+a)\,z &= a^2 \end{aligned}$$

3. Poišči vse polinome stopnje največ 4, katerih odvod se ujema z ostankom pri deljenju s polinomom x^2+3. Pri tem lahko uporabiš dejstvo, da je predpis, ki polinomu priredi ostanek pri deljenju z x^2+3, linearna preslikava.

4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, in $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potem definiramo preslikavo $f : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ s predpisom $f(X) = A\,X\,B$. Poišči potreben in zadosten pogoj za matriki A in B, da bo preslikava f bijektivna.

4. kolokvij iz Algebre 1

(5.5.1999)

1. Dani sta matriki A in B. Poišči bazo vektorskega prostora $\mathrm{Ker}\,A \cap \mathrm{Im}\,B$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 12 & -1 \\ 2 & 5 & 8 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Dana je matrika A. Poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Za dodatni 2 točki izračunaj $\exp(A)$.

3. Naj bodo $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$ in $p_3(x) = x^3$. Na polinomih stopnje največ 3 je dan skalarni produkt, za katerega velja $\langle p_0, p_0\rangle = 1$, $\langle p_0, p_1\rangle = 1$, $\langle p_0, p_2\rangle = -3$, $\langle p_0, p_3\rangle = 0$, $\langle p_1, p_1\rangle = 5$, $\langle p_1, p_2\rangle = -3$, $\langle p_1, p_3\rangle = 0$, $\langle p_2, p_2\rangle = 13$, $\langle p_2, p_3\rangle = 0$ in $\langle p_3, p_3\rangle = 1$. Poišči ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Naj velja $a_0 = a_1 = 1$ in $a_n = 2\,a_{n-1} + 3\,a_{n-2}$ za $n \geq 2$. Izpelji eksplicitno formulo za člene zaporedja $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Vsaka naloga je vredna 5 točk.

1. Pokaži, da se spojnice razpolovišč mimobežnih robov tristranične piramide sekajo v eni točki, ki te spojnice razpolavlja.

2. Pokaži, da za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ velja enakost $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\,\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c})\,\vec{a}$.

3. Poišči ravnino, ki ne seka premice $\frac{x-5}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{z-8}{6}$, seka ravnino $-6\,x + 2\,y + 3\,z = 18$ pod pravim kotom in je od izhodišča oddaljena 7 enot.

4. Poišči vse rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} 3\,x - y + w &= 9 \\ x - w &= -2 \\ x + z - 3\,w &= -11 \\ x - 2\,y + 3\,z + w &= 1 \end{aligned}$$

2. kolokvij iz Algebre I
(3.12.1999)

1. Reši matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & -6 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 25 & 4 & 12 & 3 \\ -3 & -7 & -7 & -6 \\ 14 & -2 & 11 & -9 \\ 8 & 17 & 19 & 13 \\ -21 & -3 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

2. Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^n$ enostolpični matriki. Pokaži da je $\mathrm{sled}(x\,y^{\mathrm{T}}) = x^{\mathrm{T}}\,y$.
$(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A = [a_{ij}], \quad \mathrm{sled}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii})$

3. Naj bo A obrnljiva matrika velikosti $n \times n$. Z $\det(A)$ in A, izrazi $\det(\widetilde{A})$ (determinanta k matriki A prirejene matrike) in $\widetilde{\widetilde{A}}$ (matrika prirejena matriki $\widetilde{A}$).

4. Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= 1 \\ b\,x + a\,y + z &= 1 \\ a\,z + b\,w &= 1 \\ b\,z + a\,w &= 1 \end{aligned}$$

1. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_7[X]$, polinomi stopnje največ 7, je definirana preslikava $f : \mathbb{R}_7[X] \longrightarrow \mathbb{R}_7[X]$, $f(p) = p - p' + p''$. Ali je f bijektivna preslikava? Naj bo $r(x) = x^2 - 3$. Poišči tak $p \in \mathbb{R}_7[X]$, da bo $f(p) = r$. *(25 točk)*

2. Diagonaliziraj matriko C. Poišči tudi prehodno matriko. *(25 točk)*

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 12 & 12 \\ 9 & -10 & 18 & 18 \\ 0 & 3 & -7 & -9 \\ 3 & -6 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

3. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je dana matrika $B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Eksplicitno izrazi $\det(B_n)$. *(30 točk)*

$$B_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Dana je matrika A. Poišči njeno Jordanovo formo in izračunaj $A^{100} - 3^{100} I$. *(30 točk)*

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 9 & 21 \\ -8 & 1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & -2 & 6 & 17 \end{bmatrix}$$

5. Vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ je opremljen s skalarnim produktom. Za ta skalarni produkt je $\{(3,0,1,-1,0), (-3,1,1,-1,-2), (0,0,1,0,-2), (3,-1,-1,2,2), (-2,0,0,0,-1)\}$ ortonormirana baza. Izračunaj kot med vektorjema $(0,1,2,-3,-2)$ in $(3,-1,0,2,0)$. *(25 točk)*

(21.1.1999)

1. Izračunaj razdaljo med premico $x = 2y - 1 = \frac{z}{2}$ in premico, ki jo določa presek ravnin $x = z$ in $x + 2y + 3z = 5$.

2. (a) Naj bo $U = V \oplus W$ in Z tak vektorski prostor, da je $V \subset Z \subset U$. Dokaži, da je potem

$$Z = V \oplus (Z \cap W)!$$

   (b) Naj bo V vektorski prostor in $A : V \to V$ linearna preslikava za katero velja $Ker\ A\ \cap\ Im\ A\ = \{0\}$. Dokaži, da je potem $Ker\ A^n\ = Ker\ A$! (Poiskusi najprej za $n = 2$)

3. (a) Poišči karakteristični in minimalni polinom matrike:

$$\left.\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}\right\} 2n.$$

   (b) Poišči vse invariantne podprostore operatorja ranga 1!

4. Dokaži, da za poljubno linearno preslikavo A velja

$$\mathrm{Ker}(A^*) = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}.$$

Izpit iz Algebre 1

(4.2.1999)

1. Dani sta ravnini $x + 3y + 2z = 6$ in $10x + 9y + 5z = 51$ in premica

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{4} = \frac{2-z}{5},$$

   ki seka ravnini v točkah A in B. Poišči tako točko C na presečnici ravnin, da bo $\angle ACB = 90°$.

2. Pokaži, da je preslikava zasuka prostora $\mathbb{R}^3$ okoli premice $y = z$ za kot $\frac{\pi}{3}$, linearna.
   Zapiši matriko te preslikave v bazi $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ in izračunaj njen minimalni polinom.
   Kaj so lastne vrednosti in lastni vektorji te preslikave?

3. V $\mathbb{R}^3$ je definiran skalarni produkt

$$< (x,y,z),(a,b,c) >= 2xa - ya - xb + 2yb - zb - yc + zc.$$

   Dopolni vektor $(1,1,1)$ do ortonormirane baze celega prostora!

4. Linearna transformacija A upodobi vsak vektor iz $\mathbb{R}^3$ v njegovo pravokotno projekcijo na ravnino $x+2y+z = 0$. Zapiši matriko preslikave v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ter poišči njen minimalni polinom, Jordanovo kanonično obliko J in matriko P, da bo $J = P^{-1}AP$.

(15.4.1999)

1. Izračunaj obseg trikotnika, ki ga določata presečišči premice $p: \; x = -y = z + 1$ z ravninama $\Pi_1 : \; -2x + y + z = 1$ in $\Pi_2 : \; y - z = -1$ ter točka na presečišču ravnin Π_1 in Π_2, ki je najmanj oddaljena od premice p.

2. Za katera naravna števila $n \in \mathbb{N}$ je determinanta

$$\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 2n \\ 0 & n-1 & & & & & 2(n-1) & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & 1 & 2 & & & \\ & & & -2 & -1 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & -2(n-1) & & & & & 1-n & 0 \\ -2n & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

kvadrat kakega naravnega števila?

3. V vektorskem prostoru V realnih polinomov stopnje manjše ali enake 2 vpeljemo skalarni produkt tako, da je množica $\{1, x+1, x^2+2x+1\}$ ortonormirana baza. Dopolni vektor x do ortogonalne baze prostora V.

4. Pokaži, da velja Ker A = Ker A^*A.

Izpit iz Algebre I

(1.6.1999)

1. Ali v splošnem velja enakost $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$?

2. Naj bo V realen vektorski prostor in $x, y, z \in V$ linearno neodvisni vektorji.
   (a) Ali so vektorji $x + y - z$, $y + z$ in $2x$ linearno neodvisni?
   (b) Ali so vektorji $x + 2y + 3z$, $2x$ in $-x + 2y + 3z$ linearno neodvisni?

3. Reši matrično enačbo
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -4 & -18 & -18 \\ 11 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Naj velja $a_0 = a_1 = 1$ in $a_n = 7a_{n-1} + 5a_{n-2}$ za $n \geq 2$. Izpelji eksplicitno formulo za člene zaporedja $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

1. Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ poljubni vektorji. Izrazi vsoto $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ z enim vektorskim produktom (v izrazu mora $\times$ nastopati natanko enkrat).

2. Naj bo
$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 5x & -1 & -1 & 4 \\ x & 3x & -6 & 4 \\ -x & 2x & 2x & 2 \end{vmatrix}$$
Določi stopnjo polinoma f (**odgovor utemelji**) in izračunaj $f(0)$ in $f(-2)$.

3. Naj bo $\mathbb{R}_2[X]$ prostor vseh polinomov stopnje največ 2. Na njem je definirana preslikava $A : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \quad (A\,p)(X) = (X^2 + 2X + 3)\,p''(X) + (X+1)\,p'(X) - 3\,p(X)$. Pokaži, da za vsak polinom $q \in \mathbb{R}_2[X]$ obstaja natanko en tak polinom $p \in \mathbb{R}_2[X]$, da je $A\,p = q$.

   Nasvet: Pokaži, da je A linearna preslikava.

4. Dana je matrika A. Poišči ortonormirano bazo vektorskega podprostora $\operatorname{Im} A$ v $\mathbb{R}^5$.
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Izpit iz Algebre 1
(24.8.1999)

1. Dana sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v $\mathbb{R}^3$. Med vektorji $\vec{x}$, ki zadoščajo enačbi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$, poišči tistega, ki ima najmanjšo dolžino.

2. Za poljubno naravno število n in realna števila $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ izračunaj determinanti
$$d_1 = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \cdots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & 1 + x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

3. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki po vrsti preslika vektorje $(1,1,0)$, $(0,1,-1)$ in $(1,2,0)$ v vektorje $(1,0,0)$, $(2,2,-2)$ in $(0,3,0)$. Napiši matriko, ki pripada preslikavi A v standardni bazi. Poišči lastne vrednosti preslikave A.

4. Na $\mathbb{R}^4$ je dan skalarni produkt, v katerem je $\{(3,-2,0,1), (10,2,-6,1), (0,1,1,2), (5,1,0,0)\}$ ortonormirana baza. V tem skalarnem produktu izračunaj skalarni produkt vektorjev $(2,-3,-5,3)$ in $(1,2,0,-4)$.

1. V enakokrakem trapezu $ABCD$ naj bo $\vec{DC} = \vec{a}$, $\vec{AB} = 2\,\vec{a}$ in $\vec{AD} = \vec{b}$. Naj bo E razpolovišče stranice BC, F razpolovišče stranice DC, S pa presečišče daljic AE in BF. Izrazi vektor $\vec{DS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna vektorja.

2. Poišči vse pare realnih števil (a, b), za katere sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2\,a\,x_4 &= a \\ x_1 + b\,x_2 + x_3 + x_4 &= 2\,b \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 &= 1 \end{aligned}$$

ni rešljiv.

3. Naj bosta U in V podprostora vektorskega prostora W, $T : W \longrightarrow W$ pa linearna preslikava. Pokaži, da velja

   (a) $T(U + V) = T(U) + T(V)$

   (b) $T(U \cap V) \subseteq T(U) \cap T(V)$

   Poišči kakšen primer, ko velja v (b) prava inkluzija.

4. Naj velja $a_0 = a_1 = 1$ in $a_n = 10\,a_{n-1} - 25\,a_{n-2}$ za $n \geq 2$. Izpelji eksplicitno formulo za člene zaporedja $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Izpit iz Algebre I

(26.1.2000)

1. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna vektorja, za katera velja $\vec{a} \times \vec{b} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\,(\vec{a} \times \vec{b})$. Pokaži, da vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $2\,\vec{a} + \vec{b}$ nista pravokotna.

2. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^5$ sta dana vektorska podprostora U in V. Prostor U napenjajo vektorji $(4, 0, -1, 4, 5)$, $(2, 1, 2, 0, 3)$ in $(0, 0, 1, 1, 0)$, prostor V pa vektorji $(4, 0, -3, 2, 5)$, $(-4, -2, 1, 4, -6)$ in $(-2, -1, 0, 2, -3)$. Poišči vsoto in presek vektorskih prostorov U in V.

3. Na $\mathbb{R}_3[x]$, vektorski prostor polinomov stopnje največ 3, je dana preslikava $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $f\Big(p\Big)(x) = (x - 1)\,p'(x) + p''(x)$. Ali je f bijektivna preslikava? Poišči vse takšne polinome $p \in \mathbb{R}_3[x]$, da bo $f\Big(p\Big)(x) = x^3 + 2$.

   Nasvet: Pokaži, da je f linearna preslikava.

4. Naj velja $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$ in $a_n = 2\,a_{n-1} - a_{n-3}$ za $n \geq 3$. Izpelji eksplicitno formulo za člene zaporedja $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

1. Poišči enačbo ravnine Π, ki vsebuje premico $x-2=\frac{3y+2}{5}=1-z$ in je pravokotna na ravnino $2y-3z=7$. Izračunaj razdaljo med ravnino Π in točko $(4,-2,1)$.

2. Za katere matrike z realnimi koeficienti so naslednje trditve smiselne? Katere izmed trditev so pravilne?

   (a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$,

   (b) elementi matrike A^2 so nenegativni,

   (c) diagonalni elementi matrike $A^{\mathrm{T}}A$ so nenegativni,

   (d) edini rešitvi enačbe $X^2=X$ sta $X=I$ in $X=0$.

   Odgovore utemelji!

3. Poišči lastne vrednosti, karakteristični polinom in minimalni polinom matrike A.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 12 & 4 & -8 \\ 1 & 8 & 2 & -4 \\ -3 & -33 & -5 & 12 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ je dan skalarni produkt, v katerem je $\{(1,2,0,0),\ (2,5,0,0),\ (1,2,3,1),\ (0,0,2,1)\}$ ortonormirana baza. Poišči ortonormirano bazo prostora, ki ga napenjajo vektorji $(2,5,2,1)$, $(4,9,-2,-1)$ in $(4,10,-6,-3)$.

Izpit iz Algebre I

(18.4.2000)

1. V $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(3,3,1)$, $B(2,1,3)$ in $C(4,2,5)$. Poišči projekcijo kvadrata $ABCD$ na ravnino $x+y+3z=24$ vzdolž vektorja $(2,1,0)$.

2. Poišči čim manjši homogen sistem linearnih enačb, katerega rešitev je linearen podprostor $\mathbb{R}^5$ razpet na vektorje $(-4,-8,5,0,0),(-1,-1,0,2,0)$ in $(-11,-16,5,2,5)$.

3. Naj bo A matrika, ki se da diagonalizirati in $p\in\mathbb{R}[x]$ poljuben polinom. Pokaži, da se je mogoče diagonalizirati tudi matriko $p(A)$.

4. Naj bo $a_0=3,\quad a_1=6,\quad a_2=4$ in $a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}$ za $n\geq 3$. Izpelji eksplicitno formulo za člene zaporedja $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$.

1. Izračunaj mešani produkt $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a})$.

2. Obravnavaj in reši sistem enačb glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ax + y + az &= 1 \\ 4x - ay + z &= 0 \\ ax + 3y + az &= 1 \end{aligned}$$

3. Diagonaliziraj matriko A (poišči tudi prehodno matriko) in zapiši minimalni polinom matrike A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Na $\mathbb{R}^4$ je dan tak skalarni produkt, da je $\Big\{(1,0,-2,2),\ (0,1,3,-7),\ (6,3,6,-23),\ (1,0,0,-1)\Big\}$ ortonormirana baza. V tem skalarnem produktu izračunaj dolžini vektorjev $(4,3,2,3)$ in $(-1,1,0,2)$ ter kosinus kota, ki ga ta vektorja oklepata.

Izpit iz Algebre I

(21.6.2000)

1. Izračunaj razdaljo med točko $(71, 26, 45)$ in presekom ravnin $2x - y + 5z = -4$ in $3x - z = 7$.

2. Naj bo $n \geq 2$ in vektorji $a_1, \ldots, a_n$ linearno neodvisni. Pokaži, da so tudi vektorji $b_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $b_2 = a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$, $\ldots$, $b_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ linearno neodvisni.

3. Poišči vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & -3 & 5 & 8 \\ -6 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Dana je matrika A. Poišči ortonormirano bazo vektorskega podprostora $\mathrm{Im}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -8 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & -12 & 3 \\ -5 & 11 & 1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$