

Univerza v Mariboru  
Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko

*Petra Žigert*

Zbirka pisnih delov izpitov in kolokvijev iz

## KOMBINATORIKE

Študijsko gradivo za študente 4. letnika smeri Matematika

Maribor, 2002

## Pisni deli izpitov

24.1.2001

1. V ravnini je  $n$  točk, med katerimi jih je  $k$  kolinearnih,  $n > k$ , razen teh pa nobena druga trojica ne določa premice.
  - a) Koliko različnih premic določajo?
  - b) Koliko različnih trikotnikov določajo?
2. Na vrh Triglava se v vrsti vzpne  $n$  planincev. Na koliko načinov se lahko spustijo v dolino, če nihče ne sme hoditi za tistim, za katerim se je vzpenjal?
3. Petim vevericam želimo razdeliti 20 orehov. Na koliko načinov lahko to naredimo,
  - a) če naj ima vsaka 2 ali 4 ali 6 orehov,
  - b) če naj nobena ne dobi več kot 5 in manj kot 3 orehe?
4. Izračunaj trdnjavski polinom deske  $D$  (prepovedana polja so prekržana) in izračunaj število načinov postavitve 6 nenapadajočih se trdnjav na komplement deske  $D$ .

X			X	X	X
	X	X		X	X
X			X	X	X
	X	X		X	
X	X	X	X		
X	X	X	X		

$D$

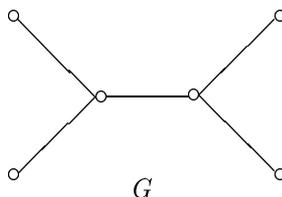
7.2.2001

1. Naj bo  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  poljubna permutacija množice  $\mathbb{N}_n$ , kjer je  $n$  liho število. Dokaži, da je produkt

$$(p_1 - 1)(p_2 - 2) \cdots (p_n - n)$$

sodo število.

2. V nekem mestu imamo  $p$  avtošol. Vsak izmed  $p + n$  prijateljev se vpiše v eno avtošolo. Na koliko načinov lahko to naredijo, če je v vsako avtošolo vpisan vsaj eden izmed njih in sta  $p$  in  $n$  poljubni naravni števili?
3. Koliko je besed dolžine  $n$  nad abecedo  $\{a, b\}$ , ki ne vsebujejo dveh zaporednih  $a$ -jev?
4. Podan je graf  $G$ .



- a) Poišči ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa  $G$  pri njenem delovanju na točkah grafa.
- b) Na koliko načinov lahko točke grafa  $G$  pobarvamo s tremi barvami?

21.1.2002

1. Iz vrtnic, aster in lilij bi radi naredili šopek z devetimi cvetovi. Cvetov iste vrste med seboj ne razlikujemo. Koliko različnih šopkov lahko napravimo
  - a) če nimamo nobenih omejitev,
  - b) če mora posamezni šopek vsebovati vsaj en cvet vsake vrste?
2.  $2n$  ljudi je imelo kosilo za okroglo mizo z označenimi stoli. Za isto mizo želijo tudi večerjati, vendar tako, da nihče ne sedi nasproti iste osebe, kot je sedel med kosilom. Pokaži, da je število vseh takšnih razporeditev enako

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{k!} \left( \frac{n!}{(n-k)!} \right)^2 (2n-2k)! .$$

3. Poišči rodovno funkcijo za število razbitij množice z  $n$  elementi na dva neprazna razreda.
4. Na koliko načinov lahko na bela polja običajne šahovske deske velikosti  $8 \times 8$  postavimo  $k$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , nenapadajočih se trdnjav?

4.2.2002

1. Skupina 40 turistov, med katerimi je 10 otrok s svojimi mamami, naleti na ozko brv čez potok, po kateri lahko gre naenkrat samo en človek. Nobena dva otroka si nista v sorodstvu. Na koliko načinov lahko prečkajo potok, če
  - a) je vseeno, kako se zvrstijo,
  - b) mora vsak otrok iti neposredno pred ali pa za svojo mamo,
  - c) mora določeni otrok iti pred svojo mamo (ne nujno neposredno pred njo)?

2. Reši rekurzijo

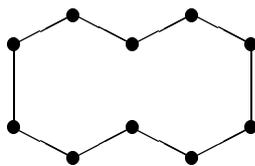
$$a_n - a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-3}),$$

če je  $a_i = i$  za  $i = 0, 1, 2$ .

3. Z uporabo rodovne funkcije izrazi splošni člen rekurzivno podanega zaporedja

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n3^n, \quad a_0 = 1, a_1 = 2.$$

4. Molekula benzena ima obliko desetkotnika, kot je to razvidno s slike. V ogliščih so ogljikovi atomi in na vsakega lahko vezemo vodikov atom (H) ali metilni radikal ( $\text{CH}_3$ ).



- a) Koliko različnih molekul dobimo ?
- b) Na koliko načinov lahko vezemo pet H-atomov in pet  $\text{CH}_3$ -radikalov?

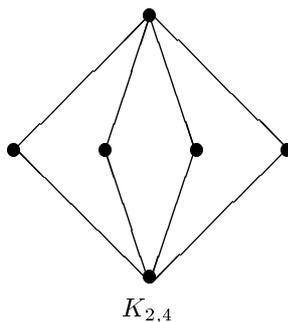
10.6.2002

1. Na prireditvi se za govorniškimi odrom zvrsti  $m \geq 3$  žensk in  $n \geq 2$  moških. Na koliko načinov se lahko razporedijo, če
  - a) se morajo govorniki istega spola zvrstiti eden za drugim,
  - b) Eva, Ana in Mira ne smejo imeti govora ena za drugo in enako velja za Jureta in Tadeja.
2. Reši rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 4^n$$

pri pogojih  $a_0 = 1$  in  $a_1 = 6$ .

3. Poišči rodovno funkcijo in jo reši za število načinov izbire sodniške trojice za košarkaško tekmo, če imamo na voljo  $n$  sodnikov.
4. Na koliko neekvivalentnih načinov lahko z dvema barvama pobarvamo točke grafa  $K_{2,4}$ ?



# Kolokviji

## 1. kolokvij 2000-01

1. Koliko je besed dolžine 20 v naši abecedi, če
  - a) vsaka beseda vsebuje 14 soglasnikov in nikdar dva samoglasnika ne stojita skupaj,
  - b) se začne s soglasnikom in je med dvema soglasnikoma vedno en samoglasnik ter se pojavi vseh 5 samoglasnikov?
2. Naj bosta  $m, n$  naravni števili, pri čemer je  $m \geq n$ . Koliko je najkrajših poti po celoštevilski mreži od izhodišča do točke  $(m, n)$ , če poti izgledajo kot stopnice različnih širin, katerih višina je 1?

3. Koliko je različnih sumandov v razvoju izraza

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n.$$

4. Na večerjo je povabljenih  $n$  poročenih parov in posedejo se za okroglo mizo z  $2n$  stoli, ki so označeni. Na koliko načinov se lahko posedejo za mizo tako, da noben poročen par ne sedi skupaj?

## 1. kolokvij 2001-02

1. Morsova abeceda je način kodiranja s pikami in črticami, kjer so lahko kodirani nizi različnih dolžin. Kolikšna vsaj mora biti dolžina niza, če želimo zakodirati vsa petmestna števila, ki
  - a) so sestavljena iz različnih števk,
  - b) ne vsebujejo števka 0, 4 ali 7?
2. Na koliko načinov lahko izberemo črno in belo polje na  $n \times n$  šahovnici tako, da izbrani polji ne bosta pripadali niti isti vrstici niti istemu stolpcu, če je  $n$  sodo število?
3. Na koliko načinov lahko  $n$  različnih bombonov razdelimo šestim otrokom tako, da natanko dva ne dobita nobenega?
4. Dokaži identiteto:

a)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq n_i \leq n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

če mora biti  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ,

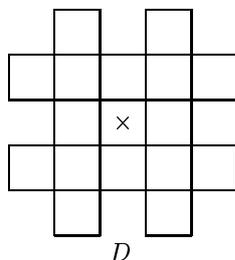
b)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4},$$

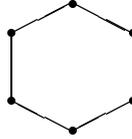
če je  $n \geq 4$ .

## 2. kolokvij 2000-01

- Iz črk a, b in c sestavljamo besede. Naj bo  $a_n$ ,  $n \geq 1$ , število vseh takšnih  $n$  mestnih besed, v katerih ni zaporednih b-jev ali c-jev in obenem ni v besedi podzaporedja cb.
  - Določi  $a_1, a_2, a_3$ .
  - Poišči rekurzivno formulo za  $a_n$ .
- Na koliko načinov lahko 3000 enakih pisemskih ovojníc razdelimo, v paketih po 25, med štiri skupine študentov tako, da dobi vsaka skupina vsaj 150 in ne več kot 1000 pisemskih ovojníc?
- Določi trdnjavski polinom za desko  $D$ .



- Molekulo benzena lahko z grafom predstavimo kot pravilen šestkotnik, katerega oglišča so ogljikovi atomi. Benzen nitriramo tako, da na vsak ogljikov atom vežemo kvečjemu eno  $\text{NO}_2$  skupino, nastale molekule pa imenujemo nitrotolueni. Koliko različnih nitrotoluenov lahko dobimo s postopkom nitriranja? (Na sliki je grafični prikaz molekule benzena).

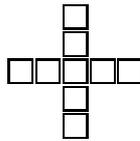


2. kolokvij 2001-02

1. Zaporedje  $a_n$  je rekurzivno podano kot  $a_n = a_{n-1} + 2$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_0 = 2$ .
  - a) Poišči rodovno funkcijo  $G(x)$  zaporedja  $a_n$  in eksplicitno izrazi koeficient pred  $x^n$  v  $G(x)$ .
  - b) S pomočjo rodovne funkcije zaporedja  $a_n$  poišči rodovni funkciji zaporedij  $b_n = 3a_n$  in  $c_n = a_{n+4}$ .
2. Koliko permutacij  $\pi$  množice  $\{1, 2, \dots, 10\}$  ima lastnost  $|\pi(x) - x| \neq 3$  za vsak  $x$  iz  $\{1, 2, \dots, 10\}$ ?
3. Linearna koda  $\mathcal{C}$  je določena z nadzorno matriko

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Določi parametre in kodne besede linearne kode  $\mathcal{C}$ .
  - b) Ob predpostavki, da je pri prenosu prišlo do ene napake, popravi kodni besedi 1100011 in 1000000.
4. Mlin na veter je sestavljen iz kvadratnih ploščic, kot je to razvidno s slike.



- a) Na koliko različnih načinov lahko ploščice pobarvamo z modro in rdečo barvo?
- b) Koliko je barvanj z natanko tremi modrimi ploščicami?