Vaje 1: Logika in množice

Osnovni pojmi matematične logike

Osnovni logični operatorji so: $\neg$ (negacija), $\wedge$ (in), $\vee$ (ali), $\Rightarrow$ (implikacija), $\Leftrightarrow$ (ekvivalenca).
Naj bosta A in B enostavni izjavi. Vsaki resnični izjavi priredimo vrednost 1, neresnični pa vrednost 0. Iz tabele 1 je razvidana resničnost sestavljene izjave po operatorjih.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tabela 1: Tabela pravilnosti sestavljenih izjav.

Še nekaj lastnosti:

- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$;
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

Naloge

1. Trditev *če zunaj sije sonce, potem je toplo* zapiši s simboli. Kdaj je trditev resnična? Zpiši negacijo te trditve.

2. Dane so izjave $A: \ \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = x$, $B: \ \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \ xy = 1$, $C: \ \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \ x + y = 0$. Ugotovi katere izmed trditev so resnične in zapiši njihove negacije.

Množice

Naj bosta A in B množici. Potem velja:

- $(A \subseteq B) \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Rightarrow x \in B)$;
- $(A = B) \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$;
- $A \cap B = \{x;\; x \in A \wedge x \in B\}$;
- $A \cup B = \{x;\; x \in A \vee x \in B\}$;
- $A \setminus B = \{x;\; x \in A \wedge x \notin B\}$;
- $A^C = \{x;\; x \notin A\} = \mathcal{U} \setminus A$;
- $\mathcal{P}(A) = \{X;\; X \subseteq A\}$;
- $A \times B = \{(x,y);\; x \in A \wedge y \in B\}$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \setminus B \;\Leftrightarrow\; A \cap B^C$;
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Ločimo naslednje vrste intervalov:

- **Zaprti interval** $[a,b]$ vsebuje vsa realna števila, ki ležijo med a in b, vključno s krajiščema. Lahko rečemo tudi, da so to vsa števila x, za katera velja: $a \leq x \leq b$.
- **Polodprti interval** $(a,b]$ vsebuje vsa realna števila, ki ležijo med a in b, vključno s krajiščem b. Lahko rečemo tudi, da so to vsa števila x, za katera velja: $a < x \leq b$.
- **Odprti interval** (a,b) vsebuje vsa realna števila, ki so večja od a in manjša od b. Lahko rečemo tudi, da so to vsa števila x, za katera velja: $a < x < b$.

Pravila za računanje s koreni:

- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$;
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
- $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Pri računanju s potencami upoštevamo naslednja pravila:

- $a^0 = 1$;
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
- $a^m a^n = a^{m+n}$;
- $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$.

Logaritem definiramo takole. Naj bo $a > 0$ in $a \neq 0$. Potem

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Za računanje z logaritmi velja:

- $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$;
- $\log_a x - \log_a y = \log_a(\frac{x}{y})$;
- $r \log_a x = \log_a x^r$ za vsak $r \in \mathbb{R}$;
- $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

Naloge

1. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$. Zapiši $A \cup B, A \cap B, (A \setminus B) \cap (B \setminus A), A \times B, \mathcal{P}(A)$.
2. Dokaži: $A \cap (B \cup A) = A$.
3. Dane so množice $A = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R};\ 4 \leq x \leq 10\}$. Z intervali zapišite naslednje množice: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap B \cap C$.
4. Dane so množice $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^3 + x^2 - 2x = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ e^{x^2 - x} = 1 \vee x - 3 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R};\ \log_x 9 = 2 \vee x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \vee 5 - x = 0\}$.
   (a) Zapiši elemente množic $A, B, C, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, (A \setminus C) \cup B, (A \cup B \cup C) \setminus (B \cap C), (C \setminus A) \cup (A \cap B)$.
   (b) Zapiši in grafično predstavi kartezična produkta $A \times B$ in $B \times A$.
5. Dana je univerzalna množica $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, 9\}$ in množice $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,4,6,8\}, C = \{7,9\}$. Za dane množice narišite Vennov diagram in zapišite elemente množic $A^C, B^C, (A \cup B \cup C)^C, (A \cap B \cap C)^C, (B \setminus A)^C$.
6. Naslednje množice zapišite z intervali.
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ 2x < x + 1 < 2x - 1\}$;
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{x-4}{x+1} \geq 0\}$;
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{x+2} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3}\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ -5^{2x+1} + 25 > 0\}$;

(e) $E = \{x \in \mathbb{R};\ -(\frac{1}{5})^{2x+1} + \frac{1}{25} > 0\}$.

7. Zapišite elemente množice $A = \{x \in \mathbb{R};\ \log_3 x = -2 \vee \log_4 16 = x \vee \log x + \log(x + 3) = \log(x-1) + \log(x+2) \vee \log_2 \sqrt[3]{x+1} - \log_2 \sqrt[3]{9x+1} = -1\}$.

8. Narišite množico $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 2x - 1 \vee y \geq 1\}$.

9. Množice $A = \{1, 2, 3\} \times [0, 1]$, $B = [0, 1] \times (\{1\} \cup [2, 3])$ in $C = (\mathbb{Z} \times [-1, 1]) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ nariši v koordinatnem sistemu.

10. Z intervali zapišite naslednje množice:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{2} \leq 2^x < 2\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ 1 < \log_3 x < 5\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ 1 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 2\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 2\pi \wedge \sin(2x) > 0 \wedge \sin(3x) \geq 0\}$.