Vaje 4: Kompleksna števila

Kopleksno število z ima obliko $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$, i pa je kompleksno število z lastnostjo $i^2 = -1$. Kompleksna števila si geometrijsko predstavljamo kot točke v ravnini, to je $z = x + iy$ predstavimo s točko (x, y) v ravnini.
Naj bo $z = x + iy$. Potem je x realni del kompleksnega števila z, y pa imaginarni del kompleksnega števila z.
Konjugirano število $\overline{z}$ kompleksnega števila $z = x + iy$ je kompleksno število $\overline{z} = x - iy$.
Naj bosta $z, w \in \mathbb{C}$ in $z = x + iy$. Potem velja:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
- $\overline{(\overline{z})} = z$;
- $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$;
- $z \cdot \overline{z} \geq 0$;
- $\sqrt{z \cdot \overline{z}}$ je razdalja od točke z do izhodišča;
- $\sqrt{z \cdot \overline{z}} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \leq |z|$;
- $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \leq |z|$;
- $|z| \geq 0$;
- $|z| = |\overline{z}|$;
- $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$;
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Polarni zapis kompleksnega števila

Vemo že, da je kompleksono število $z = x + iy$ enolično določeno s parom (x, y) realnih števil, ki predstavlja točko v ravnini. Poleg tega je z enolično določeno tudi z drugim parom realnif števil (r, φ), kjer $r = |z|$ in φ je kot med pozitivnim poltrakom realne osni in poltrakom, ki ga določa število z. Velja zveza:

- $x = r \cdot \cos\varphi$;
- $y = r \cdot \sin\varphi$;
- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (polarni zapis kompleksnega števila z);

- argument produkta je enak vsoti argumentov;
- absolutna vrednost produkta je enaka produktu absolutnih vrednosti;
- $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$;
- $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$;
- $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;
- številu 0 ne določamo argumenta;
- $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$.

Naloge

1. Poenostavi naslednje izraze:
   (a) $(4i)^2 + (2+5i)^3 - i^8 + 2i^4 + i^9 =$
   (b) $\frac{1}{i} - \frac{5i}{2-i} + i^3(1+i) =$
   (c) $\left|\frac{(2+3i)^2}{1+i}\right| + \left|\frac{i^{15}}{i^{10}+2}\right| =$
2. V obsegu kompleksnih števil poišči rešitev enačbe $z^2 - 4z + 13 = 0$.
3. Za naslednja kompleksna števila z poišči $Re(z), Im(z), \overline{z}, |z|$:
   (a) $z = 3 + 2i$;
   (b) $z = \frac{5+10i}{1-2i} + \frac{10i}{1+3i}$.
4. Narišite množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo pogoju:
   (a) $Re(z) > 1$;
   (b) $|z| < 4$;
   (c) $|z - 2| > 3$;
   (d) $|z + i - 1| < 3$;
   (e) $z \cdot \overline{z} = 4$;
   (f) $|z - i| = |z + i|$;
   (g) $Im(\overline{z}^3) < 0$.
5. V polarnem zapisu zapiši naslednja kompleksna števila:
   (a) $z = -1 - i$;
   (b) $z = 2i$;
   (c) $z = \frac{2(\sqrt{3}-2i)}{5-i\sqrt{3}}$.

6. Izračunaj $(1+i\sqrt{3})^6$.

7. Izračunaj $(3+i\sqrt{3})^{2015}$. Ugotovi še, za katera naravna števila n je kompleksno število $(3+i\sqrt{3})^n$ realno.

8. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe:

   (a) $z^5 = 32i$;

   (b) $z^3 - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$;

   (c) $z^3 - i\sqrt{27} = 0$;

   (d) $z^4 = (2+2i)^8$;

   (e) $|z| + z = 2 + i$;

   (f) $z^2 - iz = |z - i|$

   in jih predstavi v kompleksni ravnini.