Vaje 5: Zaporedja

Zaporedje je funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ponavadi sliko naravnega števila n s funkcijo a namesto $a(n)$ pišemo a_n in imenujemo n-ti člen zaporedja.

Za zaporedje pravimo, da je:

- **naraščajoče**, če za vsako naravno število n velja: $a_{n+1} \geq a_n$.
- **padajoče**, če za vsako naravno število n velja: $a_{n+1} \leq a_n$.
- **navzgor omejeno**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, tako da za vsako naravno število n velja: $a_n \leq M$. Številu M pravimo **zgornja meja** zaporedja a. Najmanjša izmed vseh zgornjih mej se imenuje **supremum** zaporedja a.
- **navzdol omejeno**, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, tako da za vsako naravno število n velja: $a_n \geq m$. Številu m pravimo **spodnja meja** zaporedja a. Največja izmed vseh spodnjih mej se imenuje **infimum** zaporedja a.
- **omejeno**, če je omejeno navzgor in navzdol.

Realno število $A \in \mathbb{R}$ je **stekališče** zaporedja s členi a_n, če je za vsak $\varepsilon > 0$ neenakost $|a_n - A| < \varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo indeksov n.

Realno število $L \in \mathbb{R}$ je **limita** zaporedja s členi a_n, če je za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0 tako da za vsak $n \geq n_0$ velja $|a_n - L| < \varepsilon$. Če obstaja limita zaporedja, pravimo, da je to zaporedje konvergentno.

Izrek. Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno.

Naloge na vajah

1. Naslednja zaporedja so podana z nekaj prvimi členi. Če obstajajo, poiščite supremum in infimum ter stekališča podanih zaporedij.

$$(a_n) = (7, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots);$$
$$(b_n) = (7, 0, 1, 2, 3, 7, 1, 1, 2, 3, 7, 2, 1, 2, 3, 7, 3, 1, 2, 3, 7, 4, 1, 2, 3, \dots);$$
$$(c_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots).$$

2. Naslednja zaporedja so podana s splošnim členom. Izračunajte prvih nekaj členov, in če obstajajo, poiščite supremum in infimum ter stekališča podanih zaporedij. Ali so podana zaporedja konvergentna?

$$a_n = \frac{n}{n+1};$$
$$b_n = \frac{1}{n} + (-1)^n;$$
$$c_n = 1 + n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

3. Zapišite splošne člene naslednjih zaporedij.

$$(a_n) = (1, \tfrac{1}{2}, 3, \tfrac{1}{4}, 5, \dots);$$
$$(b_n) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{7}{8}, \dots).$$

4. Preverite, ali je zaporedje, podano s splošnim členom $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ monotono (bodisi naraščajoče, bodisi padajoče) in ali je omejeno.

5. Koliko členov zaporedja $a_n = \dfrac{n^2-1}{3n^2+n+1}$ je od limite, ki je enaka $\frac{1}{3}$, oddaljenih za manj kot $\frac{1}{100}$?

6. Če obstajajo, izračunajte naslednje limite:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{20}{4^n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n}{2n^2+4}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+6}{n^3+4n^2+2n+1}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-6n}{n^2-2n+6}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+5}$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

7. Zaporedje je podano rekurzivno takole: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 1$. Preverite, ali je tako podano zaporedje monotono in ali je omejeno ter izračunajte njegovo limito.

8. Podano je zaporedje $a_n = \dfrac{3n}{n^2+3n+2}$.

   (a) Preverite, ali je zaporedje monotono, omejeno in ali je konverentno.

   (b) Od katerega člena dalje so od limite vsi členi oddaljeni za manj kot 0.01?