

Vaje 6: Funkcije

Funkcija ali preslikava $f : A \rightarrow B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A (**definijskega območja** ali domene, \mathcal{D}_f) priredi natanko določeni element iz množice B . Množico $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ imenujemo **zaloga vrednosti** funkcije f in označujemo \mathcal{Z}_f .

Pravimo, da je funkcija $f : A \rightarrow B$:

- **injektivna**, če za vsaka $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ velja $f(a_1) \neq f(a_2)$.
- **surjektivna**, če je $\mathcal{Z}_f = B$.
- **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna hkrati.

Naj bo $f : A \rightarrow B$ preslikava. Če obstaja taka preslikava $g : B \rightarrow A$, da je $f \circ g = id_B$ in $g \circ f = id_A$, potem pravimo, da je g **inverz** preslikave f , $g = f^{-1}$.

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Potem je f **soda**, če je $f(-x) = f(x)$ in je **liha**, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Pravimo, da je L **limita funkcije** f ko gre x proti a , $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ natanko tedaj, ko velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f : |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nekaj znanih limit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna v točki z absciso a natanko tedaj, ko je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Naloge na vajah

1. Izračunajte definicijska območja naslednjih funkcij.

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + e^{\frac{1}{x}};$$

$$g(x) = \ln(4x^2 - x^4) + \sqrt[3]{\ln(x+1)} - 1;$$

$$h(x) = \frac{2x}{x^2 - 4};$$

$$i(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2x}\right).$$

2. Za naslednje funkcije preverite, če so sode ali lihe.

$$f_1(x) = x^3 - 3x;$$

$$f_2(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}};$$

$$f_3(x) = x^7 + 1;$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. Naj bo $f(x) = 9x - 6$ in $g(x) = \cos(2x)$. Zapišite predpise, po katerih slikajo funkcije $f \circ g$, $g \circ f$ in $g \circ g$.

4. Izračunajte definicijsko območje funkcije $\sqrt{f(g(f(x)))}$, kjer je $f(x) = e^x$ in $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

5. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0, \\ x; & x > 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0, \\ -x^2; & x > 0. \end{cases}$$

Zapišite predpisa, po katerih slikata kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

6. Naj bo L množica vseh ljudi sveta in M množica vseh mesecev.

- (a) Naj bo $f : L \rightarrow M$ funkcija, ki vsakemu človeku priredi mesec, v katerem se je rodil. Ali je tako definirana funkcija injektivna in ali je surjektivna?
- (b) Naj $g : L \rightarrow L$ vsakemu človeku priredi njegovega očeta. Ali je tako definirana funkcija injektivna in ali je surjektivna?

7. Preverite, če je funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{če } x \text{ sod} \\ 3x + 1 & \text{če } x \text{ lih} \end{cases}$$

injektivna in če je surjektivna.

8. Naslenjim funkcijam izračunajte definicijsko območje, zalogo vrednosti ter inverz, če obstaja.

$$f_1(x) = \sqrt{2 - 4x}$$

$$f_2(x) = 2^x + 2^{x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{-x + 5}{x + 1}$$

9. Funkcija $f : [-2, 3) \rightarrow (-2, 9]$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & -2 \leq x < 0 \\ 9 - x^2 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

Skicirajte graf funkcije f in preverite, da je le-ta bijektivna. Nato izračunajte še njen inverz.

10. Zapišite predpis, po katerem slika inverzna funkcija funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ \ln(x + 2) & -1 \leq x \leq e - 2 \\ 2x + 5 - 2e & x > e - 2 \end{cases}.$$

11. Čim natančneje skicirajte grafe naslednjih funkcij:

(a) $f_1(x) = \frac{x(x - 2)^2}{x^2 - 1}$;

(b) $f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$;

(c) $f_3(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}\right)$;

(d) $f_4(x) = \sqrt{-x + 1}$.

12. Izračunajte naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 + 8}{x^7 - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{3x^2 + 5x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin(5x)}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

13. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ x - 2 & x \geq 1 \end{cases}.$$

Če obstajata, izračunajte limiti funkcije f v točkah z abscisama $x = -1$ in $x = 1$.

14. Ali obstajata realni števili a in b , da bosta funkciji f in g zvezni?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}.$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ b & x = 0 \\ x^2 - 2x & x < 0 \end{cases}.$$