Vaje 7: Odvod

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Pravimo, da je funkcija f **odvedljiva v točki** $a \in D$ natanko tedaj, ko obstaja $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Če ta limita obstaja, jo označimo $f'(a)$. Pravimo, da je funkcija **odvedljiva**, če ostaja odvod v vsaki točki definicijskega območja.

Naj bosta f in g odvedljivi funkciji. Potem veljajo naslednja pravila za odvajanje:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),\ c \in \mathbb{R}$$

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Odvodi elementarnih funkcij:

$$c' = 0;\ c \in \mathbb{R}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Točki $x_0 \in D$ pravimo **stacionarna točka**, če je $f'(x_0) = 0$. Stacionarna točka je lokalni minimum, če je $f''(x_0) > 0$ in je lokalni maksimum, če je $f''(x_0) < 0$.

Funkcija f **narašča** na nekem intervalu I, če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in I$ in **pada** na nekem intervalu I, če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in I$.

Funkcija f je **konveksna** na nekem intervalu I, če je $f''(x) > 0$ za vsak $x \in I$ in je **konkavna** na nekem intervalu I, če je $f''(x) < 0$ za vsak $x \in I$.

Naloge na vajah

1. Izračunajte odvode naslednjih funkcij.

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^4 + 4 + e^x;$$
$$f_2(x) = \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4};$$
$$f_3(x) = x\sqrt{x};$$
$$f_4(x) = (3x^2 + 2)\cos x;$$
$$f_5(x) = \frac{\ln x}{x-1};$$
$$f_6(x) = e^x \tan x;$$
$$f_7(x) = (2x^2 + 3x)^3;$$
$$f_8(x) = \sqrt{x^2 + 2x};$$
$$f_9(x) = \cos(3x^2);$$
$$f_{10}(x) = x^2 e^{2x};$$
$$f_{11}(x) = \ln(\cos(x^2 + 4x));$$
$$f_{12}(x) = \arctan\frac{x+1}{x-1};$$
$$f_{13}(x) = x^x;$$
$$f_{14}(x) = x^{\ln x}.$$

2. Izračunajte n-ti odvod funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3. Izračunajte enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ v točki z absciso 3.

4. Izračunajte enačbo tangente na krivuljo z enačbo $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ v točki z absciso 1 in pozitivno vrednostjo ordinate.

5. Izračunajte enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - x + 1$, ki je vzporedna premici $y = 2x - 1$.

6. Poiščite vse točke, v katerih je smerni koeficient normale na graf funkcije $f(x) = x - \cos x$ enak -1.

7. V katerih točkah tangenta na graf funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ z osjo x oklepa kot $\frac{\pi}{4}$?

8. Določi realno število a tako, da bosta tangenti na graf funkcije $f(x) = ax^2 - 9a$ v njegovih presečiščih z abscisno osjo pravokotni.

9. Podan je enakokrak trikotnik z osnovnico $c = 4$ in višino na osnovnico $v_c = 8$. Kateri od včrtanih pravokotnikov z eno stranico na osnovnici ima največjo možno ploščino?

10. Zapišite število 18 kot vsoto dveh števil x in y tako, da bo njun produkt največji možen.

11. Dana je funkcija
$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$
Izračunajte njeno definicijsko območje, ničle ter stacionarne točke. Izračunajte še intervale naraščanja in padanja ter konveksnosti in konkavnosti funkcije f in nazadnje ob upoštevanju vsega izračunanega narišite graf funkcije f.

12. Dana je funkcija
$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}.$$
Izračunajte njeno definicijsko območje, ničle ter lokalne minimume in maksimume, če obstajajo. Nazadnje ob upoštevanju vsega izračunanega narišite graf funkcije f.

13. S pomočjo prvih dveh odvodov skicirajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$.