1 Ponovitev

Graf $G = (V(G), E(G))$ sestavlja množica točk $V(G)$, imenovanih **vozlišč**, ter množica **povezav** med temi vozlišči, $E(G)$. Če med vozliščema u in v obstaja povezava pravimo, da sta vozlišči u in v **sosednji**. Povezavi, ki imata skupno eno krajišče, imenujeno **incidenčni** povezavi (na primer povezavi uv in uw). **Stopnja vozlišča** u, $\deg(u)$, predstavlja število vozlišč, ki so z u sosednji. Najmanjšo stopnjo med vsemi vozlišči grafa imenujemo **minimalna stopnja** vozlišč v grafu in označimo $\delta(G)$, največjo pa **maksimalna stonja vozlišč**, $\Delta(G)$. Če sta v grafu minimalna in maksimalna stopnja enaki rečemo, da je graf **regularen**. Za grafe velja naslednja opazka:

Lema o rokovanju.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2\,|E(G)|$$

Graf $H = (V(H), E(H))$ je **podgraf** grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja: $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H se imenuje **vpeti**, če ima enaka vozlišča kot graf G. Če ima podgraf H na svojih vozliščih vse iste povezave kot graf G se imenuje **inducirani** podgraf grafa G. Graf se imenuje **povezan**, če za vsak par vozlišč obstaja pot med njima v grafu. Če graf ni povezan, je nepovezan. Vsaka povezana enota grafa se v tem primeru imenuje **povezana komponenta** grafa. Vozlišče v grafa G se imenuje **presečno vozlišče**, če graf po odstranitvi tega vozlišča postane nepovezan. Povezava e grafa G se imenuje **most**, če graf po odstranitvi te povezave postane nepovezan.
Graf G je **dvodelni graf**, če lahko množico vozlišč zapišemo kot $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ tako, da znotraj množice A ter znotraj množice B ni povezav. Izkaže se, da je graf dvodelni natanko tedaj, ko nima lihih ciklov.
Bijektivna preslikava $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ je **izomorfizem** grafov, če je $uv \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $f(u)f(v) \in E(H)$.

1. Spomnimo se nekaj znanih grafov in njihovih oznak.

2. Nariši graf G, če je $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$ in $E(G) = \{zy, yv, vz, uz, uv, uy\}$. Določi stopnje vozlišč grafa G, $\delta(G), \Delta(G)$ in nariši $\overline{G}$.

3. Nariši primer grafa na

   (a) štirih vozliščih s stopnjami: 1,2,2,3;

   (b) petih vozliščih s stopnjami: 1,3,3,4,4;

(c) šestih vozliščih, ki ima vsa vozlišča lihe stopnje in vsaj eno vozlišče stopnje 5.

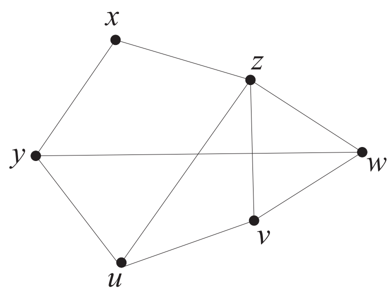
4. Dokaži, da povezan r-regularen graf, kjer je r sodo število, nima mosta.

5. Podan je graf G na sliki 1.

   (a) Nariši primer podgrafa H grafa G, za katerega je $V(H) = \{x, z, u, v\}$.

   (b) Nariši primer podgrafa H grafa G, ki je induciran z vozlišči iz množice $\{x, z, u, v, y\}$.

   (c) Nariši primer vpetega podgrafa H grafa G.



Slika 1: Graf G.

6. Konstruiraj graf s petimi vozlišči in šestimi povezavami, ki ne vsebuje 3-ciklov.

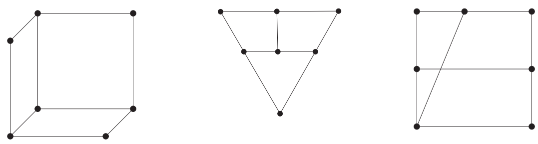
7. Dokaži, da ima graf G na vsaj dveh vozliščih, vsaj dve vozlišči iste stopnje.

8. Brane je skupaj s svojo ženo Ano priredil zabavo. Na zabavo so prišli še štirje drugi pari. Nekateri udeleženci so si na zabavi segli v roko z drugimi, medtem ko si nihče ni segel v roko s svojim partnerjem. Na koncu zabave je brane vprašal ostale udeležence, s koliko osebami so se rokovali. Dobil je 9 različnih odgovorov. S koliko udeleženci se je rokovala Ana?

9. Kateri od grafov na sliki 2 so med seboj izomorfni?

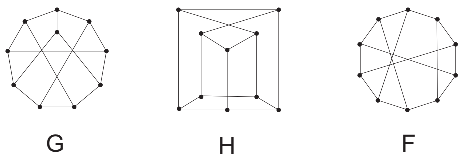
10. Poišči primer asimetričnega grafa G (njegov edini avtomorfizem je identiteta) z $|V(G)| > 1$.

11. Pokaži, da ima vsak graf G, ki je izomorfen svojemu komplementu $4n$ ali $4n + 1$ vozlišč.



Slika 2: Garfi in naloge 9.

12. Za vsak par grafov na sliki 3 določi ali sta izomorfna. Če sta poišči izomorfizem med njima, sicer utemelji, zakaj nista izomorfna.



Slika 3: Grafi G, H in F.

13. Naj bo U poljubna končna množica in $\mathcal{D}$ neka neprazna družina njenih podmnožic. Definirajmo graf G takole: $V(G) = \mathcal{D}$ in $E(G) = \{AB; A \neq B,\ A \cap B \neq \emptyset\}$. Graf G imenujemo *presečni graf* družine $\mathcal{D}$. Katerim znanim grafom sta izomorfna presečna grafa družine $\mathcal{D}$, kjer je

    (a) $\mathcal{D}= \{\{i, i+1\};\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$;

    (b) $\mathcal{D}$ družina vseh $(n-1)$-elementnih podmnožic n-elementne množice.

    (c) Nariši presečni graf maksimalnih polnih podgrafov grafa na sliki 1.

14. Naj bo $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dokaži, da velja:

$$|E(G)| = \frac{\sum_{i=1}^{n} |E(G - v_i)|}{n-2}.$$

15. S pomočjo stopnje vozlišča g grafa G in vozlišča h grafa H zapiši stopnjo vozlišča (g, h) grafa $G \square H$. Nariši graf $P_3 \square K_3$.

16. Za kartezični, krepki in leksikografski produkt zapiši formule za razdalje v produktu, glede na razdalje v faktorjih.

2 Drevesa in dvodelni grafi

Drevo je povezan graf brez ciklov. Gozd je graf brez ciklov.
Za graf G so naslednje naslednje trditve

(a) G je drevo;

(b) G je povezan in vsaka povezava je most;

(c) Vsak par vozlišč povezuje natanko ena pot;

(d) G je povezan in število povezav je $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Graf G je dvodelni graf natanko tedaj, ko ne vsebuje lihega cikla.

2.1 Naloge

1. Dokaži, da je G drevo natanko tedaj, ko je G povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

2. Nariši vsa paroma neizomorfna drevesa na šestih vozliščih.

3. Naj bo $F = (V, E)$ gozd s c povezanimi komponentami. Dokaži, da je $|E| = |V| - c$.

4. Dokaži, da je zaporedje naravnih števil $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 1$ $(n \geq 2)$ zaporedje stopenj vozlišč nekega drevesa natanko tedaj, ko je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

5. Drevo T ima stopnje vozlišč 1 in 4. Vemo, da ima natanko 10 vozlišč stopnje 4, ostala vozlišča pa so stopnje 1. Koliko povezav oziroma vozlišč premore drevo.

6. Drevo T ima štiri vozlišča stopnje 2, eno vozlišče stopnje 3, dve vozlišči stopnje 4 in eno vozlišče stopnje 5. Vozlišč višjih stopenj nima. Izračunaj koliko vozlišč stopnje 1 ima? Koliko vozliš in koliko povezav ima drevo T?

7. Naj bo $\mathcal{T}$ družina dreves, ki imajo vsa notranja vozlišča stopnje 3.

    (a) Nariši vsa neizomorfna drevesa družine $\mathcal{T}$ na 12ih in 13ih vozliščih.

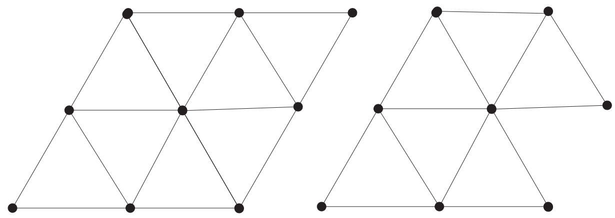
    (b) Pokaži, da imajo drevesa družine $\mathcal{T}$ število listov za 2 večje od števila notranjih vozlišč.

8. Naj bo G k-regularen dvodelen graf z $k > 0$ in dvodelnim razbitjem $V(G) = X + Y$. Dokaži, da velja: $|X| = |Y|$.

9. Iz standardne 8×8 šahovnice odstranimo zgornji levi kvadrat in spodnji desni kvadrat. Dokaži, da dobljene deske ne moremo pokriti z 1×2 dominami tako, da se domine med seboj ne prekrivajo.

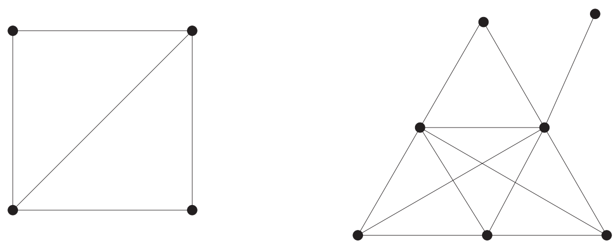
2.2 Tetivni grafi

1. Poišči popolno eliminacijsko shemo grafoma na sliki 4.



Slika 4: Garfa iz naloge 1.

2. Dokaži, da sta tetivna graf G narisana na sliki 5 tako poddrevesna grafa kot poddrevesna grafa klik.

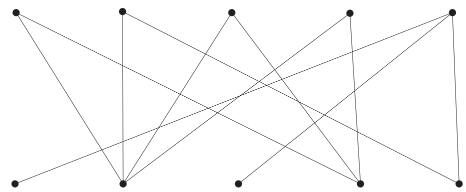


Slika 5: Garfa iz naloge 2.

3. Dokaži, da je graf G tetiven natanko tedaj, ko je G poddrevesni graf klik.
4. Določi kromatično število tetivnega grafa G glede na klično število $\omega(G)$.
5. Dokaži, da za vsak graf intervalov G velja: $\chi(G) = \omega(G)$.
6. Naj bo G tetivni graf. Dokaži, da lahko G predstavimo kot presečni graf dreves drevesa T, kjer vsak list drevesa T predstavlja eno vozlišče grafa G.
7. Karakteriziraj simplicialna vozlišča znotraj dreves.
8. Dokaži, da drevesa, ki so grafi intervalov nimajo asteroidnih trojk. (Tri nesosednja vozlišča, za katere velja, da med poljubnima dvema obstaja pot, ki ne seka okolice tretjega vozlišča, je asteroidna trojka.)

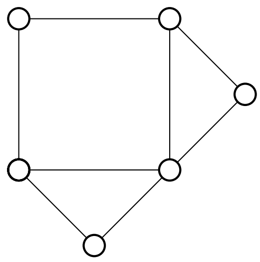
9. Karakteriziraj grafe intervalov znotraj dreves. Neformalni dokaz!
10. Ali so racepljeni grafi popolni? Ali so bločni grafi popolni?
11. Dokaži, da je komplement tetivnega grafa popoln graf.
12. Dokaži, da so tetivni grafi šibko tetivni. (Graf G je šibko tetiven, če G in $\overline{G}$ ne vsebujeta induciranih ciklov dolžive > 4.)

3 Prirejanja



Slika 6: Graf G.

1. Ali ima graf G na sliki 6 popolno prirejanje?
2. Dokaži Hallov izrek s pomočjo Dilworthovega izreka dokaži .
3. Imamo množico ljudi in množico prostih služb tako, da je vsaka oseba kvalificirana za natanko k služb in obstaja natanko k ljudi, ki so kvalificirani za vsako izmed služb.
   (a) Dokaži, da je število ljudi enako številu služb.
   (b) Poišči največje možno število ljudi, ki dobijo službe za katere so kvalificirani.



4. Vsak učenec v razredu ima seznam k knjig, ki si jih želi sposoditi v knjižnici. Vsaka knjiga se pojavi na natanko k seznamih. Učenci bi si radi istočasno sposodili vsak po eno knjigo iz seznama. Največ koliko učencev lahko dobi knjige?
5. Grafu na sliki poišči najmanjše vozliščno pokritje.
6. $\tau(G)$ izrazi z $\alpha(G)$.
7. Zapiši definicijo (popolnega) prirejanja z uporabo vpetih podgrafov in stopnje vozlišč.

8. Naj bo $G = A+B$ dvodelen graf in naj za vsak $X \subseteq A$ velja: $|N(X)| \geq |X|$. Dokaži, da obstaja tako prirejanje M, da za vsak $x \in A$ velja: $deg_M(x) = 1$.

9. Naj bo G graf, ki ima popolno prirejanje. Dokaži, da vsako prirejanje dobljeno s požrešno metodo, pokrije vsaj polovico vseh vozlišč grafa G.

3.1 Povezanost

1. Naj bo k sodo število. $H_{k,n}$ je graf na n vozliščih, ki ležijo na krogu tako da tvorijo vozlišča pravilnega n-kotnika. Vsako vozlišče je sosednje s $\frac{k}{2}$ najbližjimi vozlišči v vsako smer. Dokaži, da je $\kappa(H_{k,n}) = k$.

2. Konstruiraj graf G za katerega velja: $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$.

3. Dokaži, da za 3-regularne grafe velja $\kappa(G) = \lambda(G)$.

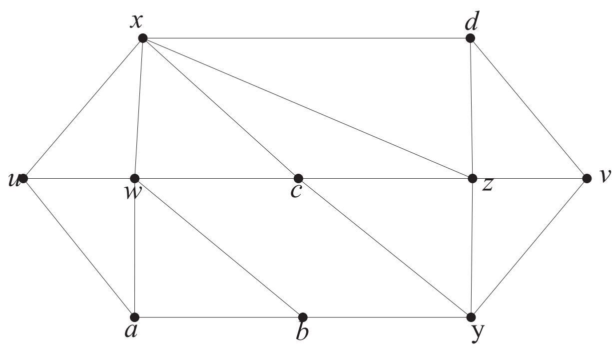
4. Brez uporabe Mengerjevega izreka dokaži, da je graf G z vsaj tremi vozlišči 2-povezan natanko tedaj, ko za poljubni vozlišči u, v grafa G obstajata notranje disjunktni u, v-poti v G.

5. Poišči $\kappa(x, y)$ (velikost najmanjše separacije za x, y) grafa G na Sliki 7.

6. Dokaži, da je graf G z $|V(G)| \geq 3$ in $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ hamiltonov.

7. Naj bo G graf in $xy \in E(G)$. Dokaži: $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - xy) \leq \kappa(G)$.

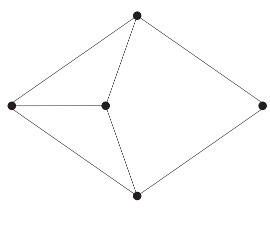
8. Naj bo G graf na $2n$ vozliščih in naj bo stopnja vsakega vozlišča vsaj n. Dokaži, da je G povezan.



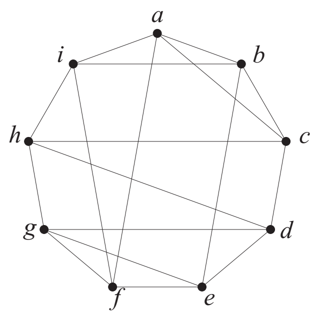
Slika 7: Graf G.

4 Barvanje vozlišč in povezav-ponovitev

1. Določi kromatično število grafov na sliki 8.



Slika 8: Grafa G, H.



Slika 9: Graf G.

2. Naj bo $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definirajmo graf $G_{n,k}$ takole:

$$V(G_{n,k}) = \{Y \subseteq X;\ |Y| = k\},$$

$$E(G_{n,k}) = \{Y_1Y_2;\ Y_1, Y_2 \in V(G_{n,k}) \text{ in } |Y_1 \cap Y_2| = 1\}.$$

   (a) Nariši graf $G_{4,2}$.

   (b) Določi kromatični indeks in kromatično število grafa $G_{4,2}$.

   (c) Graf $G_{n,k}$ je očitno regularen. Določi njegovo stopnjo.

3. Dokaži, da za poljubna grafa G in H velja: $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

4. Določi kromatično število grafa $C_4 \square G$, kjer je G graf na Sliki 9. Določi še kromatični indeks grafa G.

5. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve.

   (a) Vsak k-kromatičen graf ima dobro k-barvanje, v katerem ima en bravni razred $\alpha(G)$ vozlišč.

   (b) Za vsak graf G je $\chi(G) \leq |V(G)| - \alpha(G) + 1$.

6. Graf Sierpinskega $S(n,k)$ je definiran takole: $V(S(n,k)) = \{1,2,\ldots,k\}^n$. Dve različni vozlišči $u = (u_1,\ldots,u_n)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$ sta sosednji natanko tedaj ko obstaja $h \in \{1,\ldots,n\}$ tako da

   (i) $u_t = v_t$ za vsak $t \in \{1,2,\ldots,h-1\}$;

   (ii) $u_h \neq v_h$; in

   (iii) $u_t = v_h$ in $v_t = u_h$ za vsak $t \in \{h+1,\ldots,n\}$.

   Nariši grafa $S(3,3)$ in $S(2,4)$. Izračunaj $\chi(S(n,3))$ in $\chi'(S(n,k))$, za sodi k.

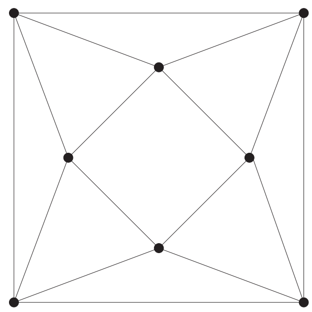
7. Dokaži, da so 3-regularni hamiltonovi grafi tipa 1.

4.1 Kritični grafi

1. Dokaži, da je za vsak k-kritičen graf H $\delta(H) \geq k-1$.

2. Poišči kromatično število grafa G na sliki 10. Ali je G kritičen graf? Če ni, poišči kak $\chi(G)$-kritičen podgraf od G.

3. Naj bo G združenje grafov C_5 in K_s. Določi kromatično in klično število grafa G. Ali je G barvno kritičen?



Slika 10: Graf G.

4. Dokaži, da je vsak k-kritičen graf 2-povezan.

5. Dokaži, da je vsak k-kritični graf $(k-1)$-povezan po povezavah.

6. Naj bo G k-kritičen graf.

   (a) Dokaži, da G nima presečne množice s paroma sosednjimi vozlišči.

   (b) Dokaži: če je $S = \{x, y\}$ presečna množica, potem $xy \notin E(G)$ in G ima S-lobe H tako da velja: $\chi(H + xy) = k$.

7. Za vsak $n \geq 4$ in $n \neq 5$ konstruiraj 4-kritičen graf na n vozliščih.

8. Dokaži, da je za vsak k-kromatičen graf G brez trikotnikov, Mycielskijeva konstrukcija G', $(k+1)$-kromatičen graf brez trikotnikov.

9. Dokaži: Če je G k-kritičen, potem je G' (Mycielskijeva konstrukcija) $(k+1)$-kritičen.

5 Neodvisnostno število

1. Dokaži:

   (a) $\alpha(G \Box H) \le \min\{\alpha(G)|V(H)|, \alpha(H)|V(G)|\}$

   (b) $\alpha(G \Box H) \ge \alpha(G)\alpha(H) + \min\{|V(G)| - \alpha(G), |V(H)| - \alpha(H)\}$.

2. Dokaži $\chi(G) \ge \left\lceil \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \right\rceil$, $\alpha(G) \ge \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$. Za vsako neenakost poišči primer grafa za katerega bo veljal enačaj.

3. Pokaži, da za netrivialen graf G velja $\alpha(G) \le |V(G)| - \frac{|E(G)|}{\Delta(G)}$.

4. Dokaži: $\alpha(G) \ge \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{deg_G(v)+1}$.

5. Dokaži, da je graf G m-pobarljiv natanko tedaj, ko je $\alpha(G \Box K_m) \ge |V(G)|$.

6 Splošno

1. Naj bo G graf z diametrom vsaj 3. Dokaži, da je diameter grafa $\overline{G}$ največ 3.

2. Dokaži, da je graf G dvodelen natanko tedaj, ko ima vsak podgraf H grafa G neodvisno množico velikosti vsaj $\frac{|V(H)|}{2}$.

3. Naj bo G graf z $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$.

   (a) Dokaži, da je diameter graf G največ 2.

   (b) Ali je G povezan?

4. Naj bo G povezan graf, ki ne vsebuje niti P_4 niti K_3 kot induciran podgraf. Dokaži, da je G polni dvodelni graf

5. Naj bo G povezan graf, ki ne vsebuje niti P_4 niti C_4 kot induciran podgraf. Dokaži, da v G obstaja vozlišče s stopnjo $|V(G)| - 1$.