Prvi delni izpit pri predmetu **DISKRETNA MATEMATIKA 1**
25. november 2014

1. **[25]** Na spoznavni večer je prišlo n študentov, ki se pred spoznavnim večerom med seboj še niso poznali (nihče ni poznal nikogar). Na koliko načinov se lahko spoprijateljijo tako, da bo vsak študent dobil vsaj enega prijatelja.

2. **[25]** Dokaži naslednji trditvi.
   (a) V vsaki množici $n+1$ naravnih števil obstajata 2, katerih razlika je deljiva z n.
   (b) Za vsako naravno število n obstaja naravno število m, katerega števke so 0 in 5 in je deljivo z n.

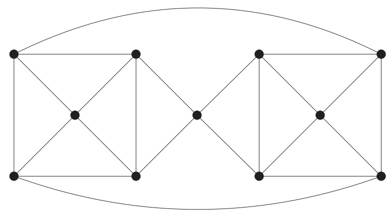
3. **[25]** V 1.a razredu je 20 učencev in 14 miz (vsaka miza ima prostor za dva učenca). Na koliko načinov lahko
   (a) učence posedemo tako, da nihče ne sedi sam?
   (b) učence razdelimo v 4 skupine (člani i-te skupine bodo i-ti predstavljali rezultate), če morata biti v vsaki skupini vsaj 2 učenca?

4. **[25]** Reši nehomogeno linearno rekurzijo $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3} + 3^n + 2^n$, pri začetnih pogojih $a_0 = 1$,$a_1 = 3$, $a_2 = 8$.

Drugi delni izpit pri predmetu **DISKRETNA MATEMATIKA 1**
14. januar 2015

1. **[30]** Naj bo G_k graf, katerega vozlišča so vsi nizi dolžine k z elementi iz $\{0, 1\}$, dve vozlišči x in y pa sta sosednji natanko tedaj, ko se razlikujeta na natanko dveh mestih.
   (a) Koliko povezanih komponent ima graf G_k, za $k \geq 1$?
   (b) Koliko vozlišč in koliko povezav ima graf G_k, za $k \geq 1$?
   (c) Za katere k so povezane komponente grafa G_k Eulerjevi grafi?

2. **[25]** Na sliki 1 je narisan graf G.
   (a) Najmanj koliko vozlišč je potrebno odvzeti grafu G, da postane nepovezan?



Slika 1: Graf G.

(b) Določi kromatično število in kromatični indeks grafa G.

3. **[20]** V letu 2015 bo skupina planincev obiskala 119 gor. Vsako goro bo obiskalo natanko 5 planincev iz te skupine, vsak par planincev iz te skupine pa bo obiskal natanko dve skupni gori.

   (a) Koliko gor bo obiskal planinec iz skupine?

   (b) Koliko planincev je v skupini?

4. **[25]** V zaoderju stoji 5 žensk A, B, C, D, E in 5 moških A', B', C', D', E'. Gledalci si bodo lahko ogledali 5 nastopov, in sicer, vsakič bo natopal par (ženska, moški). Zaradi neujemanja, pari $(A, E'), (B, A'), (B, C'), (B, D'), (C, B'), (C, D'), (D, B'), (E, A')$, (E, E') ne bodo nastopili skupaj. Na koliko načinov lahko nastopijo tako, da bo v teh nastopih nastopilo vseh 5 žensk in vseh 5 moških?

Izpit pri predmetu **DISKRETNA MATEMATIKA 1**

28. januar 2015

1. **[25]** Na nakup kart čaka 20 žensk, med njimi tudi Brina in 15 moških, med njimi tudi Aljaž. Na koliko načinov se lahko postavijo v vrsto tako, da Aljaž stoji pred Brino in

   (a) so prva tri mesta za Brino ženske?

   (b) vsaki ženski, ki ne stoji za žensko, sledi natanko ena ženska?

2. **[25]** Izračunaj:

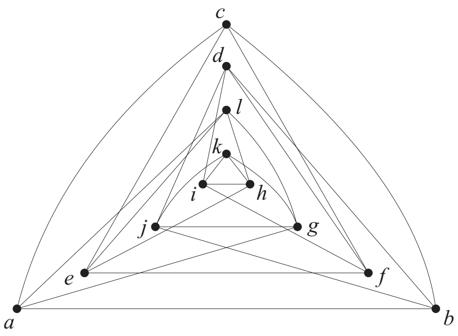
   (a) $\sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} (-3)^{2k+1}$;

   (b) $\sum_{k=0}^{27} k \binom{27}{k} 3^{2k}$.

3. **[20]** Na sliki 1 je narisan graf G.

   (a) Ali je graf G ravninski?

   (b) Ali je G Hamiltonov?



G

4. **[30]** Naj bo $G_1 = K_1$. Za $k > 1$ konstruirajmo G_k na sledeč način. Disjunktni uniji grafov $G_1, \ldots, G_{k-1}$ dodamo neodvisno množico T velikosti $\prod_{i=1}^{k-1} |V(G_i)|$. Za vsako izbiro $(v_1, \ldots, v_{k-1})$, kjer $v_i \in V(G_i)$, obstaja natanko eno vozlišče iz T, ki ima za soseščino $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$.

   (a) Nariši grafe G_1, G_2, G_3.

   (b) Naj bo $k > 1$. Določi največji $n \in \mathbb{N}$ za katerega velja: $K_n \subseteq G_k$.

   (c) Za vsak $k > 1$ izračunaj $\chi(G_k)$.

Izpit pri predmetu **DISKRETNA MATEMATIKA 1**

17. februar 2015

1. **[25]** Večerje se bo udeležilo 20 slavnih pevcev. Vsak pevec bo na večerjo s seboj pripeljal svojo ženo. Na koliko načinov lahko udeležence posedemo za 10 okroglih miz, z neoznačenimi stoli, če mora imeti pevec ob sebi svojo ženo in morata za vsako mizo sedeti vsaj dva slavna pevca?

2. **[25]** Iz črk A, B, C sestavljamo besede. Koliko besed dolžine n obstaja, če A in B ne smeta stati skupaj (podnizi AB in BA so prepovedani)?

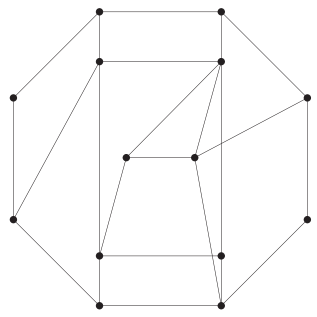
3. **[25]** Na sliki 1 je narisan graf G.

   (a) Ali je graf G Hamiltonov?

   (b) Ali je graf G ravninski?

4. **[25]** Naj bo G povezan graf na n vozliščih. Definirajmo nov graf G' na naslednji način. Vozlišča grafa G' so vpeta drevesa grafa G (za vsako vpeto drevo grafa G dobimo eno vozlišče grafa G'), pri čemer sta dve vozlišči grafa G' sosednji natanko tedaj, ko imata pripadajoči drevesi $n-2$ skupnih povezav.

   (a) Naj bo e poljubna povezava grafa K_4. Nariši graf $(K_4 - e)'$.



Slika 2: Graf G.

(b) Dokaži, da je vsak tako dobljen graf G' povezan.

Izpit pri predmetu **DISKRETNA MATEMATIKA 1**

1. julij 2015

1. **[25]** Danih je 12 različnih pozitivnih dvomestnih števil. Dokaži, da obstajata dve taki, katerih razlika je dvomestno število z enakima števkama.

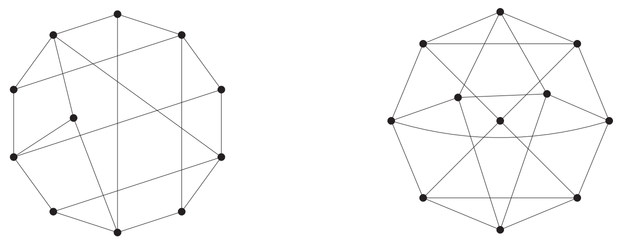
2. **[15]** Naj bo v presečno vozlišče povezanega grafa G. Dokaži, da je graf $\overline{G} - v$ povezan.

3. **[15]** Naj bo G graf z $|V(G)| = n \geq 4$, $\operatorname{diam}(G) = 2$ in $\Delta(G) = n - 2$. Dokaži, da ima G vsaj $2n - 4$ povezav.

4. **[20]** Na sliki 3 sta narisana grafa G in H.

   (a) Ali je graf G Hamiltonov?

   (b) Določi kromatični indeks grafa H.



G H

Slika 3: Grafa G in H.

5. **[25]** Ana in Bine si lahko razdelita modre, rdeče in zelene kroglice na 385 načinov (med kroglicami iste barve ne ločimo).

   (a) Koliko kroglic posamezne barve imata na voljo, če vemo, da je največ modrih in najmanj zelenih kroglic?

   (b) Na koliko načinov lahko kroglice razporedimo v tri različne posode tako, da nobena ne bo prazna?

- Vozlišče v povezanega grafa G je *presečno*, če $G - v$ ni povezan.
- Razdalja med vozlišči u in v v grafu G (oznaka $d(u, v)$) je najkrajša dolžina u, v-poti v G. Največji razdalji med parom vozlišč grafa G pravimo *diameter* grafa G, $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v);\ u, v \in V(G)\}$.
- $\Delta(G) = \max\{\deg(v);\ v \in V(G)\}$.
- $\overline{G}$ = komplement grafa G.

Diskretna matematika 1, 20.5.2015

1. **[25]** V kinu se je zbralo 16 oseb od katerih je 7 starih 15 let, 5 je starih 17 let in 4 so stare 20 let.

   (a) Na koliko načinov se lahko združijo v pare, kjer bo vsak par dobil ene kokice?

   (b) Na koliko načinov se lahko postavijo v vrsto tako, da nobena skupina oseb iste starosti ne tvori enega bloka? (Vse osebe stare 15 ne smejo stati skupaj, vse osebe stare 17 ne smejo stati skupaj in vse osebe stare 20 ne smejo stati skupaj.) vse osebe iste starosti ne stojijo skupaj?

2. **[25]** Maja sestavlja stolp iz rdečih, zelenih in modrih kock s stranico 1. Na koliko načinov lahko sestavi stolp višine n, če na rdeči kocki nikoli ne stoji zelena? (Privzamemo: na voljo je poljubno kock vsake barve, med kockami iste barve ne ločimo.)

3. **[20]** Naj bo T drevo z n vozlišči, ki ima eno vozlišče stopnje i za vsak $2 \leq i \leq k$. Ostala vozlišča v drevesu T so listi. Zapiši zvezo med k in n.

4. **[25]** Množica vozlišč grafa G_n so vse $(n-2)$-podmnožice množice z n elementi. Dve vozlišči grafa G_n sta sosedni natanko tedaj, ko imata v preseku natanko $n - 4$ elemente.

   (a) Za vsak $n \geq 4$ izračunaj $|V(G_n)|, |E(G_n)|, \delta(G_n)$ in $\Delta(G_n)$.

   (b) Za katere $n \geq$ je graf G_n povezan? Za vsak graf G_n je potrebno dokazati njegovo (ne)povezanost.

Izpit pri predmetu **DISKRETNA MATEMATIKA 1**

4. september 2015

1. **[25]** Na srečanju n vinogradnikov je vsak izmed udeležencev predstavil eno belo, eno rdečo in eno rose vino. Skupaj je bilo torej predstavljenih $3n$ različnih vin. Na koliko načinov si lahko udeleženci med seboj razdelijo testiranje vin, da vsak izmed njih poizkusi natanko eno vino vsake vrste in vsaj eno vino enega izmed svojih kolegov?

2. **[25]** Imamo kup kart, ki je sestavljen iz 40 številskih kart (10 različnih modrih, 10 različnih rdečih, 10 različnih zelenih in 10 različnih rumenih) in 32 različnih posebnih kart, ki jim pravimo visoke karte.
   (a) Na koliko načinov lahko karte razdelimo na tri enako velike neoznačene kupe?
   (b) Na koliko načinov lahko karte postavimo v vrsto tako, da vsaki visoki karti sledi vsaj ena številska karta?
   (c) Na koliko načinov lahko karte postavimo v vrsto tako, da dve številski modri karti nikoli ne stojita skupaj, vsaki rdeči številski karti pa sledi rumena številska karta?

3. **[30]** Naj bo $n \geq 3$. Graf C_n^G dobimo tako, da vsako vozlišče cikla C_n nadomestimo z eno kopijo grafa G ter vsako povezavo cikla C_n nadomestimo z vsemi možnimi povezavami med pripadajočima kopijama grafa G. [1]
   (a) Opiši vse lastnosti grafa G, ki so potrebne, da je C_n^G Eulerjev.
   (b) Kromatično število grafa C_n^G izrazi s kromatičnim številom grafa G.
   (c) Koliko je kromatični indeks grafa C_n^G glede na kromatični indeks grafa G?

4. **[20]** Z uporabo posledic Eulerjeve formule dokaži, da komplement ravninskega graf G z $|V(G)| = 11$ ni ravninski.

[1] Z drugimi besedami: $V(C_n^G) = V(C_n) \times V(G)$ in vozlišči $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(C_n) \times V(G)$ sta sosednji natanko tedaj, ko sta u_1 in u_2 sosednji v C_n ali ($u_1 = u_2$ in v_1 je sosednje z v_2 v G).