

Prvi delni izpit pri predmetu VERJETNOST

24. november 2014

1. **[25]** Na vsaki izmed dveh miz imamo postavljeni dve posodi. Na prvi mizi so v vsaki posodi 4 kroglice, in sicer ena rdeča in tri črne. Na drugi mizi so v vsaki posodi 4 kroglice, in sicer ena črna in tri rdeče. Naključno izberemo mizo in iz vsake posode na tej mizi potegnemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali drugo mizo, če sta obe izvlečeni kroglici rdeči.
2. **[20]** Naj bodo A, B, C tri naključno izbrane točke na krožnici s polmerom 1 cm. Kolikšna je verjetnost, da je trikotnik ABC ostrokoten?
3. **[30]** Trgovec naroči 100 paketov, pri čemer je v vsakem paketu 10 izdelkov. 30% paketov ima 4 neustrezne izdelke, preostalih 70% paketov pa ima en neustrezen izdelek. Trgovec ustreznost paketa preveri tako, da naključno izbere 3 izdelke in preveri njihovo ustreznost. Če so vsi trije izdelki ustrezni, potem paket obdrži, sicer ga vrne nazaj. Naključna spremenljivka X meri število paketov, ki jih je trgovec sprejel.
 - (a) **[10]** S kolikšno verjetnostjo trgovec sprejme naključno izbrani paket?
 - (b) **[10]** Zapiši verjetnostno funkcijo naključne spremenljivke X in poimenuj dano porazdelitev.
 - (c) **[10]** Oцени verjetnost, da bo trgovec sprejel med 50 in 60 paketov?
4. **[25]** Naj bo X naključna spremenljivka z gostoto $p(x) = \frac{c}{1+x^2}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) **[10]** Določi konstanto c in izračunaj $P[-1 < X < 1]$.
 - (b) **[15]** Naj bo $Y = \frac{2}{X}$. Zapiši porazdelitveno funkcijo in gostoto naključne spremenljivke Y .

Drugi delni izpit pri predmetu VERJETNOST

22. januar 2015

1. **[30]** Naključni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} c \frac{y^2}{1+x^2} & \text{če } (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 2] \\ 0 & \text{če } (x, y) \notin \mathbb{R} \times [-1, 2]. \end{cases}$$

- (a) Določi konstanto c .
- (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo naključnega vektorja (X, Y) in robni porazdelitvi p_X in p_Y . Ali sta naključni spremenljivki X in Y neodvisni?
2. [25] Ana lovi ribe. Vsako ribo, ki jo ulovi, da v posodo. Verjetnost, da je riba, ki jo ulovi neužitna je $\frac{1}{10}$. Ana preneha z lovljenjem, ko so v posodi 3 neužitne ribe. Naključna spremenljivka X naj meri število rib v posodi po končanem lovljenju. Zapiši rodovno funkcijo naključne spremenljivke X , ter izračunaj njeno matematično upanje.
3. [20] Naj bosta R in V neodvisni naključni spremenljivki, ki merita polmer oz. višino pokončnega stožca in sta porazdeljeni enakomerno na $[0, 2]$. Določi pričakovano vrednost prostornine pokončnega stožca.
4. [25] Naključni vektor (X, Y) je enakomerno porazdeljen na: $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- (a) Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke $Y|X$.
- (b) Za $X \in [1, 2]$ izračunaj in natančno skiciraj regresijo $E(Y|X)$.

Drugi delni izpit pri predmetu **VERJETNOST**
22. januar 2015

1. [25] Naključni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} c \frac{y^2}{1+x^2} & \text{če } (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 2] \\ 0 & \text{če } (x, y) \notin \mathbb{R} \times [-1, 2]. \end{cases}$$

- (a) Določi konstanto c .
- (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo naključnega vektorja (X, Y) in robni porazdelitvi p_X in p_Y . Ali sta naključni spremenljivki X in Y neodvisni?
2. [25] Ana lovi ribe. Vsako ribo, ki jo ulovi, da v posodo. Verjetnost, da je riba, ki jo ulovi neužitna je $\frac{1}{10}$. Ana preneha z lovljenjem, ko so v posodi 3 neužitne ribe. Naključna spremenljivka X naj meri število rib v posodi po končanem lovljenju. Zapiši rodovno funkcijo naključne spremenljivke X , ter izračunaj njeno matematično upanje.

3. **[20]** Naj bosta R in V neodvisni naključni spremenljivki, ki merita polmer oz. višino pokončnega stožca in sta porazdeljeni enakomerno na $[0, 2]$. Določi pričakovano vrednost prostornine pokončnega stožca.
4. **[30]** Delec se giblje po celoštevilskih točkah daljice dolžine 2 cm. Verjetnost, da je pred začetkom gibanja od levega krajišča daljice oddaljen za i cm je $\frac{1}{3}$ za vsak $i = 0, 1, 2$. Vsako sekundo delec z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ ostane v isti točki, medtem ko se v vse sosednje točke premakne z enako verjetnostjo. Do točk, ki so od delca oddaljene za več kot 1cm z enim korakom ne more.
 - (a) Gibanje opiši z Markovsko verigo. Zapiši matriko prehoda.
 - (b) S kolikšno verjetnostjo je delec po dveh sekundah od levega krajišča daljice oddaljen za i cm, $i = 0, 1, 2$?
 - (c) Poišči stacionarno porazdelitev in klasificiraj stanja markovske verige.

Izpit pri predmetu VERJETNOST

28. januar 2015

1. **[25]** V škatli imamo 15 bidonov, 9 izmed njih še nikoli ni bilo uporabljenih. Naključno izberemo 3, pijemo iz njih in jih vrnemo v škatlo. Kasneje spet izberemo 3 bidone.
 - (a) Kakšna je verjetnost, da nobeden od teh bidonov še ni bil uporabljen?
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da se po prvi izbiri število uporabljenih bidonov ni spremenilo, če veš da smo v drugi izbiri dobili vse tri neuporabljene bidone?
2. **[25]** Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} ce^{-x-2} & \text{če } x > -2 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$
 - (a) Izračunaj c in izračunaj $P[X < 0]$.
 - (b) Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = X^2$.
3. **[25]** Pošten kovanec mečemo, dokler ne padeta dve cifri zapored. Meti so med seboj neodvisni. Izračunaj pričakovano število vseh metov.
4. **[25]** V paraboličnem odseku $\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y^2 \leq x\}$ na slepo izberemo poljubno točko (X, Y) .
 - (a) Kako sta porazdeljeni naključni spremenljivki X in Y ? Ali sta neodvisni?

(b) Izračunaj $E(X|Y)$.

Izpit pri predmetu VERJETNOST

17. februar 2015

1. [25] V prvi posodi sta dve beli in ena črna, v drugi posodi pa ena bela in dve črni kroglici. Ana izbere eno kroglico, z verjetnostjo 0.3 iz prve posode in z verjetnostjo 0.7 iz druge poseode, in je ne vrne. Nato še Breda iz iste posode na slepo izvleče eno kroglico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je Breda izvlekla belo kroglico?

(b) Recimo, da je Breda izvlekla belo kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je tudi Ana izvlekla belo kroglico?

2. [25] Ana meče pošteno igralno kocko.

(a) Izračunaj verjetnost dogodka A , da Ana prvo šestico vrže v tretjem metu.

(b) Izračunaj verjetnost dogodka B , da Ana tretjič vrže šestico v šestem metu kocke.

(c) Izračunaj $P(B|A)$.

3. [25] Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{če } x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

kjer je $\lambda > 0$. Določi porazdelitev, pričakovano vrednost in disperzijo slučajne spremenljivke $Z = 2Y - X$.

4. [25] Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljena zvezno z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y)e^{-x-y} & \text{če } x, y > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Za $x > 0$ izračunaj robno gostoto $p_X(x)$.

(b) Izračunaj in skiciraj $E(Y|X = x)$.

Izpit pri predmetu VERJETNOST

17. februar 2015

1. **[25]** V prvi posodi sta dve beli in ena črna, v drugi posodi pa ena bela in dve črni kroglici. Ana izbere eno kroglico, z verjetnostjo 0.3 iz prve posode in z verjetnostjo 0.7 iz druge poseode, in je ne vrne. Nato še Breda iz iste posode na slepo izvleče eno kroglico.
 - (a) Kolikšna je verjetnost, da je Breda izvlekla belo kroglico?
 - (b) Recimo, da je Breda izvlekla belo kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je tudi Ana izvlekla belo kroglico?
2. **[25]** Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{če } x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

kjer je $\lambda > 0$. Določi porazdelitev, pričakovano vrednost in disperzijo slučajne spremenljivke $Z = 2Y - X$.

3. **[25]** Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljena zvezno z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y)e^{-x-y} & \text{če } x, y > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

- (a) Za $x > 0$ izračunaj robno gostoto $p_X(x)$.
 - (b) Izračunaj in skiciraj $E(Y|X = x)$.
4. **[25]** Ropar načrtuje rope. Najpreprostejši podvig je rop trgovine. Po zahtevnosti mu sledijo še rop pošte, nato rop zlatarne, rop banke pa je najzahtevnejši podvig. Na zečetku ropar ropa trgovino. Po vsakem ropu, se z enako verjetnostjo loti kateregakoli zahtevnejšega podviga ali pa pristane v zaporu. Ko pristane v zaporu, tam tudi ostane. Zapiši matriko prehoda tega procesa in določi pričakovano število korakov, v katerih ropar pristane v zaporu.

Izpit pri predmetu **VERJETNOST in STATISTIKA**

15. april 2015

1. **[25]**Do šole je štiri minute hoda, vmes pa sta dva semaforja, na katerih dve minuti gori zelena, dve minuti pa rdeča luč. Kolikšna je verjetnost, da pridem do šole v petih minutah? Seveda privzamemo, da je faza semaforja izbrana na slepo (oz. da sta fazi semaforjev izbrani na slepo in neodvisno).
2. **[25]** Pošteno igralno kocko mečemo dokler tretjič ne vržemo šestice.

- (a) Zapiši porazdelitev za število potrebnih metov.
- (b) Izračunaj verjetnost dogodka A , da bomo kocko vrgli šestkrat.
- (c) Izračunaj verjetnost dogodka A , če veš, da je prva šestica padla v tretjem metu.

3. **[25]** Naključni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{če } x \geq 0, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

- (a) Določi konstanto c .
 - (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_{(X,Y)}(x, y)$.
 - (c) Določi gostoto naključne spremenljivke $Z = X + Y$.
4. **[25]** Na vzorcu velikosti 1000 študentov smo zbrali podatke o številu k pristopov k izbranemu izpitu, preden so izpit opravili:

k	1	2	3	4	5	več
št. študentov	350	275	163	113	25	74

Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi domnevo, da je število pristopov k izpitu porazdeljeno geometrijsko s parametrom 0.4. Predpostavimo, da razred več predstavlja 6 pristopov k izpitu. Ali lahko na stopnji značilnosti α zavrnamo hipotezo, da sta za opravljen izpit v povprečju potrebna dva pristopa?

Izpit pri predmetu **VERJETNOST** 29. junij 2015

1. **[20]** Na stranici AB enakostraničnega trikotnika ABC s stranico 4 enote naključno izberemo točko D . Naključna spremenljivka X naj meri dolžino daljice DC .
 - (a) Zapiši porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve naključne spremenljivke X .
 - (b) Kakšna je verjetnost, da bo dolžina omenjene daljice vsaj $\sqrt{14}$ enote?
2. **[25]** V rdeči posodi je 5 rdečih, 3 modre in 4 zelene kroglice. V modri posodi so 3 rdeče, 3 modre in 4 zelene kroglice. V zeleni posodi so 4 modre in 3 zelene kroglice. Naključno izberemo posodo in iz nje izvlečemo dve kroglici.
 - (a) Kolikšna je verjetnost, da sta kroglici enake barve?
 - (b) Opazimo, da sta kroglici enake barve. Kolikšna je verjetnost, da smo ju izvlekli iz modre posode?

3. [25] Standardno kocko mečemo, dokler ne pade tako ena pika kot tudi šest pik. Naj bo N število potrebnih metov. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.
4. [30] Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{če } x > y > 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte konstanto c in zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X - 2Y$.

Izpit pri predmetu VERJETNOST
29. junij 2015

1. [25] V rdeči posodi je 5 rdečih, 3 modre in 4 zelene kroglice. V modri posodi so 3 rdeče, 3 modre in 4 zelene kroglice. V zeleni posodi so 4 modre in 3 zelene kroglice. Naključno izberemo posodo in iz nje izvlečemo dve kroglici.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da sta kroglici enake barve?
- (b) Opazimo, da sta kroglici enake barve. Kolikšna je verjetnost, da smo ju izvlekli iz modre posode?

2. [25] Standardno kocko mečemo, dokler ne pade tako ena pika kot tudi šest pik. Naj bo N število potrebnih metov. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.
3. [25] Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{če } x > y > 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte konstanto c in zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X - 2Y$.

4. [25] Ana ima vsako jutro na izbiro dve torbici rdečo in črno. Če na nek dan izbere rdečo, bo tudi naslednji dan izbrala rdečo z verjetnostjo $\frac{1}{5}$. Če pa je izbrala črno torbico, bo tudi naslednji dan izbrala črno z verjetnostjo $\frac{3}{4}$.
- (a) Anino izbiro torbic predstavi z markovsko verigo.
- (b) Kolikšna je verjetnost, da bo po n dneh Ana izbrala črno torbico, če je danes izbrala črno torbico?
- (c) Klasificiraj obe stanji markovske verige.

Izpit pri predmetu VERJETNOST
1. september 2015

1. **[25]** Na daljici $[0, 2]$ naključno izberemo točko, ki interval razdeli na dva dela. Omejena dela predstavljata dolžino katet pravokotnega trikotnika. Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina takšnega trikotnika manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega trikotnika.
2. **[25]** V nekem mestu je 40% moških in 60% žensk. Med njimi naključno izberemo 200 oseb za mestni svet.
 - (a) Oцени verjetnost, da bo v mestnem svetu vsaj 60 in ne več kot 90 moških?
 - (b) V katerih mejah glede na povprečje lahko z verjetnostjo 0.9 pričakujemo število žensk v mestnem svetu?
3. **[25]** Podjetje X se nahaja v zgradbi z n nadstropji in pritličjem. V vsakem nadstropju i se nahaja vodja oddelka, ki ima svojo pisarno a_i , v pritličju se v pisarni a_0 namesto vodje nahajata tajnica in kavni avtomat. Za poljubni nadstropji i in j , je razdalja med pisarnama a_i in a_j ravno $|j - i|a$ metrov. Tajnica vodjem oddelkov priskrbi kavo v takšnem vrstnem redu kot si jo naročijo, pri čemer je v vsakem trenutku enako verjetno, da si kavo zaželi poljubni vodja. Kolikšno povprečno pot opravi tajnica pri tem opravilu, če vedno nosi le eno kavo?
4. **[25]** Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{če } y \leq 2 - |x - 2| \text{ in } y \geq 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte konstanto c in pogojno gostoto $p_{X|Y}(x)$. Poišči še regresijsko krivuljo $f(y) = E(X|Y)$.