1 Osnove verjetnosti

- $G = \{e_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ prostor elementarnih dogodkov = osnovni objekt pri konstrukciji matematičnega prostora.
- $A \subseteq G$ je dogodek, E_λ je elemntarni dogodek
- $A \subseteq B$: A je način dogodka B.
- $A \cup B$: vsota dogodkov (se zgodi vedno ko se zgodi A ali B)
- $A \cap B = AB$: produkt dogodkov (se zgodi, ko se zgodita oba dogodka A in B.)
- N nemogoč dogodek, G gotov dogodek, $\bar{A}$ nasprotni dogodek (se zgodi vedno, ko se ne zgodi A)
- Če $|\Lambda| <= |\mathbb{N}|$, potem: $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots$ in $\overline{A_1 A_2 \ldots} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots$ (De Morganova zakona)
- Dogodka A in B sta nezdružljiva, če $AB = N$. V tem primeru $A \cup B$ označujemo z $A + B$
- Vsaka števna vsota dogodkov se da izrazit kot vsota paroma nezdružljivih dogodkov.
- Družina dogodkov $S = \{S_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ se imenuje popoln sistem dogodkov, če so njeni elementi paroma nezdružljivi dogodki, njihova vsota pa je gotov dogodek.

Če je množica G končna ali števno neskončna, so dogodki vse podmnožice od G ($\mathcal{P}(G)$). V primeru, ko je G nešteven, so dogodki samo tiste podmnožice potenčne množice $\mathcal{P}(G)$, ki so merljive.

Definicija 1.1 *Naj bo G prostor elementarnih dogodkov. Neprazna družina podmnožic $\mathcal{A}$ v G je σ-algebra dogodkov, če velja*

1. *$A \in \mathcal{A}$, potem $\overline{A} \in \mathcal{A}$*
2. *$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, potem $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

- G, N sta iz σ-algebre.
- σ-algebra je zaprta za števne vsote, števne produkte in nasprotne dogodke.

- Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$, je σ-algebra, ki jo definirajo vse odprte podmnožice v $\mathbb{R}$.

Naj bo G prostor elementarnih dogodkov in $\mathcal{A}$ σ-algebra dogodkov v G.

Definicija 1.2 *Verjetnost na $\mathcal{A}$ je preslikava $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:*

1. $P(A) \geq 0$ *za vsak* $A \in \mathcal{A}$;
2. $P(G) = 1$;
3. *za vsako družino* $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ *paroma nezdružljivih dogodkov velja:* $P(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$. *Število* $P(A)$ *je verjetnost dogodka* A *in urejena trojica* $(G, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *je verjetnostni prostor.*

Verjetnost je normirana mera na σ-algebri dogodkov. Iz definicije sledi, da ima verjetnost naslednje lastnosti:

(i) P(N)=0;

(ii) Za poljubne paroma nezdružljive dogodke $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ velja: $P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$;

(iii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iv) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(vi) $P(\bigcup A_n) \leq \sum P(A_n)$

(vii) Naj bo $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ in $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$. Potem velja: $P(\bigcup A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ in $P(\prod B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

(viii) $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n)$.

Skoraj gotov dogodek, je dogodek A, katerega verjetnost je enaka 1. Dogodek A je ničelni dogodek, če $P(A) = 0$. Vsota ničelnih dogodkov je ničelni dogodek, produkt skoraj gotovih dogodkov je skoraj gotov dogodek.

1.1 Naloge

1. Streljamo na tarčo s polmerom R, katere center ima polmer $\frac{R}{4}$. Zapiši prostor elementarnih dogodkov in dogodek A, ki pravi, da smo zadeli center tarče. Izračunaj še verjetnost dogodka A.

2. Mečemo pošteno igralno kocko. Imamo naslednje dogodke: A-pade sodo število pik, B-pade liho število pik, C-padejo največ 4 pike, D-pade vsaj 5 pik.

   (a) Izrazi te dogodke z elementarnimi dogodki.

   (b) Izračunaj njihove verjetnosti.

   (c) Kateri dogodki tvorijo popoln sistem dogodkov?

3. Mečemo dve pošteni igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik 8, in kolikšna je verjetnost, da je vsota padlih pik vsaj 10?

4. Imamo kocko sestavljeno iz 1000 kockic, ki jo pobarvamo in razdremo. Izračunaj verjetnost, da naključno izberemo:

   (a) kockico, ki ima pobarvani 2 ploskvi;

   (b) kockico, ki ima pobarvano vsaj eno ploskev;

   (c) 2 kockici in vsaj ena ima vsaj eno ploskev pobarvano.

5. Izmed m izdelkov je n izdelkov pokvarjenih. Izberemo k izdelkov. Kakašna je verjetnsot, da je natanko l izdelkov pokvarjenih?

6. $|A| = n, |B| = m$. Kolikšna je verjetnost, da iz vseh funkcij, ki slikajo iz A v B izberemo injektivno funkcijo?

7. Imamo 10 knjig, pri čemer so 4 knjige romani. Knjige razporedimo na polico. Kolikšna je verjetnost, da stojijo romani skupaj, če je polica ravna oz. okrogla?

8. Naključno izberemo naravno število n. Kolikšna je verjetnost, da je n deljivo s praštevilom p? Kolikšna je verjetnost, da se n^2 konča s cifro 1?

9. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo 2 števili. Izračunaj verjetnost, da sta števili tuji.

10. Imamo n parov čevljev. Naključno izberemo $2r$ čevljev. Izračunaj verjetnost, da

    (a) ne dobimo nobenega skupnega para;

(b) je natanko en par kompleten;

(c) natanko 2 para sta kompletna.

11. Mečemo dva poštena igralna kovanca. Zapiši prostor elementarnih dogodkov. Naj bo E dogodek, da na prvem kovancu pade grb in F dogodek, da na drzgem kovancu pade grb. Izračunaj verjetnost dogodka $E \cup F$.

12. Na bowlingu imamo na razpolago 6 belih in 5 črnih krogel. Naključno izberemo 3 krogle. Kolikšna je verjetnost, da izberemo eno belo in dve črni krogli?

13. Kolikšna je verjetnost, da smo pri igri poker pri deljenju dobili full hous?

14. V sobi je prisotnih n ljudi. Kakšna je verjetnost, da nobena dva nimata rojstni dan na isti dan v letu? Izračunaj to verjetnost za $n = 20$ in $n = 30$.

15. Komplet 52 kart razdelimo med 4 igralce. Kolikšna je verjetnost, da prvi igralec dobi 13 po velikosti različnih kart? Kolikšna je verjetnost, da vsak igralec dobi eno aso?

16. 36 članov kluba igra tenis, 28 jih igra skvoš in 18 badbinton. Še več, 22 članov kluba igra oboje tenis in skvoš, 12 tenis in badbinton in 9 jih igra badbinton in skvoš. Štirje izmed članov kluba igrajo vse tri športe. Koliko članov kluba igra vsaj enega izmed teh treh športov?

17. Za okroglo mizo sedi 10 poročenih parov. Kolikšna je verjetnost, da nobena žena ne sedi poleg svojega moža?

18. Predpostavimo, da imamo števno mnogo kroglic, označenih z $1, 2, 3, \ldots$. Naredimo naslednje tri poskuse:

    (P1): Minuto do 12. ure vzamemo kroglice označene s števili 1 do 10, jih damo v posodo in iz posode izvlečemo kroglico s številko 10. Pol minute do 12. ure v posodo dodatno vstavimo kroglice označene z 11 do 20 in iz posode izvlečemo kroglico označeno s številom 20. $\frac{1}{4}$ minute do 12. ure v posodo dodatno vstavimo kroglice označene s števili 21 do 30 in izvlečemo kroglico s številom 30. S postopkom nadaljujemo.

    (P2): Modificiramo poskus tako, da sedaj minuto do 12. ure izvlečemo kroglico s številom 1, pol minute do 12. ure izvlečemo kroglico s številom 2, četrt minute do 12. ure izvlečemo kroglico s številom 3,...

    (P3): Modificiramo prvi poskus tako, da sedaj na vsakem koraku naključno izberemo kroglico, ki jo izvlečemo.

Kolikšna je, pri posameznem poskusu, verjetnost dogodka, da je ob 12. uri posoda prazna?

19. Na zabavi je n oseb. Vsaka oseba na zabavi, ob nekem trenutku vrže svoj klobuk na sredino sobe. Nato vsaka oseba naključno izbere klobuk. Kolikšna je verjetnost, da

    (a) nobena oseba ne izbere svojega klobuka?

    (b) natanko k oseb izbere svoj klobuk?

20. Študenti, ki bodo pisali izpit, se posedejo v tri vrste in tri kolone. V prvi vrsti so študenti A, B in C, v drugi so D, E, F in v tretji so G, H, I. Asistent na slepo izbere tri študente in jih zamenja: prvega premesti na mesto drugega, drugega na mesto tretjega in tretjega na mesto prvega. Kolikšna je verjetnost, da sta A in B po premestitvi še vedno soseda v isti vrsti?

1.2 Geometrijska verjetnost

1. Imamo neskončno kvadratno mrežo s stranico kvadrata a. Na mrežo vržemo kovanec s premerom $2r < a$. Izračunaj verjetnost dogodkov

    (a) kovanec leži znotraj kvadrata;

    (b) kovanec seka natanko eno stranico kvadrata.

2. Iz intervala $[-1, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili x in y. Naj bo A dogodek: $x^2 + y^2 \leq 1$ in B dogodek: $|x| + |y| \geq 1$. Izračunaj $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$.

3. Ana in Bine sta zmenjena, da se dobita med 18.00 in 20.00. Njun prihod je neodvisen in naključen. Bine počaka 30 min, Ana počaka 15 min. Kolikšna je verjetnost, da se srečata?

4. Do šole je štiri minute hoda, vmes pa je semafor, na katerem dve minuti gori zelena, dve minuti pa rdeča luč. Od doma se odpravim pet minut pred začetkom pouka. Kolikšna je verjetnost, da pridem še pravočasno, če se držim predpisov? Kaj pa, če sta na poti dva semaforja? Seveda privzamemo, da je faza semaforja izbrana na slepo (oz. da sta fazi semaforjev izbrani na slepo in neodvisno).

1.3 Pogojna verjetnost

- $P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$: pogojna verjetnost glede na dogodek A (prostor elementarnih dogodkov omejimo na A).
- $P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$.
- $P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1})$.
- Dogodka A in B sta neodvisna, če ne vplivata eden na drugega. $P(B) = P(B|A) = P(B|\overline{A})$.
- A, B neodvisna, potem $P(AB) = P(A)P(B)$.

Naj bo $\{H_n\}$ popoln sistem dogodkov. Potem velja:

- $P(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(H_n)P(A|H_n)$ (formula za popolno verjetnost)
- Če $P(A) > 0$, potem $P(H_n|A) = \frac{P(A|H_n)P(H_n)}{P(A)}$.

1.4 Naloge

1. Vržemo dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik 8, če je na eni kocki padla dvojka?
2. V skladišču imamo 20 izdelkov, od tega 16 kvalitetnih. Po vrsti izbiramo izdelek za izdelkom, dokler ne izvlečemo kvalitetnega. Kolikšna je verjetnost dogodkov
    - $A\dots$ šele v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek?
    - $B\dots$ vsaj v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek?
3. Verjetnost, da tarčo zadane prvi strelec je 0.8, verjetnost, da tarčo zadane drugi strelec je 0.4. Kolikšna je verjetnost, da je tarčo zadel prvi strelec, če je tarča zadeta natanko enkrat?
4. Verjetnost, da se pri dvojčkih rodita dva dečka je a, da se rodita dve deklici pa b. Kolikšna je verjetnost, da se rodita dvojčka dečka, če se je
    (a) prvi rodil deček?
    (b) rodil en deček?
5. Na daljici dolžine 8 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Kolikšna je verjetnost dogodkov

- $X \ldots$ točki sta vsaj 1 cm oddaljeni od krajišča?
- $Y \ldots$ vsaj ena točka je od krajišča oddaljena več kot 2 cm?
- $Z \ldots$ razdalja med točkama ne presega 2 cm?
- Izračunaj še $P(Z|Y)$.

6. Top trikrat ustreli proti letalu. V prvem strelu je verjetnost zadetka 0.4, v drugem strelu je verjetnost zadetka 0.5, v tretjem pa 0.7. En zadetek sestreli letalo z verjetnostjo 0.2, dva zadetka ga sestrelita z verjetnostjo 0.6, trikrat zadeto letalo je gotovo sestreljeno. Kolikšna je verjetnost, da je bilo letalo sestreljeno? Kolikšna je verjetnost, da je bilo letalo dvakrat zadeto, če je bilo sestreljeno?

7. V žepu imam 5 kovancev, od katerih so trije pošteni, dva pa imata na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Kolikšna je verjetnost, da je tudi na drugi strani grb?

8. Igralca izmenično mečeta kovanec, katerega verjetnost, da pade grb je $p > 0$. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb. Kolikšna je verjetnost, da
   (a) zmaga igralec, ki je igro začel?
   (b) zmaga igralec, ki je bil drugi na vrsti?
   (c) se igra ne konča?

9. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku se z enko verjetnostjo premakne bodisi za enoto v levo bodisi za enoto v desno. Kolikšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za k enot, kjer $k \leq m$?

10. V vsaki ponovitvi poskusa je verjetnost, da se zgodi dogodek A enaka p. Poskus ponovimo n-krat. Kolikšna je verjetnost, da se dogodek A zgodi sodo krat?

11. Igralca izmenično mečeta kovanec. Verjetnost, da pade grb je p. Če igralec vrže grb, dobi čokolado, sicer ne dobi ničesar. Zmaga tisti, ki ima prvi dve čokoladi prednosti. Kolikšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je igro začel?

12. Pet izmed petnajstih srečk pri srečelovu prinaša dobitek. Ana izbere tri srečke, za njo pa Bojan še dve srečki. Kolikšna je verjetnost, da ima Bojan vsaj en dobitek? Kolikšna je verjetnost, da ima Bojan vsaj en dobitek, če ima Ana dva dobitka?

13. Naj bo A poljuben dogodek. Dokaži, da sta dogodka A in B neodvisna za poljuben dogodek B natanko takrat, ko je $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

14. V prvi posodi imamo 2 beli in 3 črne kroglice, v drugi posodi 1 belo in 2 črni kroglici in v tretji posodi 4 bele in 2 črni kroglici. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve posode v drugo, nato pa kroglico iz druge v tretjo posodo. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje posode. Kolikšna je verjetnost, da je na koncu izbrana kroglica črna? Če vemo, da je na koncu izbrana kroglica črna, kolikšna je tedaj verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico?

15. Mečemo pošten kovanec. Kolikšna je verjetnost, da v prvih n metih nista padli dve zaporedni cifri?