FUNKCIJE

1. Ali množica $\{(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$ predstavlja graf funkcije $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$?

2. Ugotovi, ali je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soda oz. liha.

   a) $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$,

   b) $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$,

   c) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$,

   d) $f(x) = x\operatorname{tg} x - \cos x$,

   e) $f(x) = \dfrac{x(a^x-1)}{a^x+1}$.

3. Pokaži, da se vsaka funkcija realne spremenljivke definirana na simetričnem intervalu da zapisati kot vsota sode in lihe funkcije. Na ta način zapiši funkcijo $f(x) = e^x + 1$.

4. Naj bo L množica vseh ljudi in M množica vseh mesecev v letu. Ugotovi, ali je funkcija f injektivna in ali je surjektivna, če

   a) $f: L \to M$ vsakemu človeku priredi mesec rojstva.

   b) $f: L \to L$ vsakemu človeku priredi njegovega očeta.

5. Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$ ter A in B množici, za kateri je $|A| = m$ in $|B| = n$.

   a) Koliko je funkcij $f: A \to B$?

   b) Koliko funkcij $f: A \to B$ je injektivnih?

   c) Kdaj obstaja bijektivna funkcija $f: A \to B$?

   d) Poišči vse bijektivne funkcije $f: A \to B$ za $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{a,b,c\}$.

6. Funkcije $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so podane z naslednjimi predpisi: $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \cos x$ in $h(x) = \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2})$.

   a) Pokaži, da funkcija f ni injektivna.

   b) Pokaži, da funkcija g ni niti injektivna niti surjektivna. Kaj moramo spremeniti, da bo funkcija g surjektivna? Kdaj bo bijektivna?

   c) Določi definicijsko območje funkcije h tako, da bo bijektivna.

7. Funkcija $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana z naslednjim predpisom:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \ n \text{ je sod} \\ 3n+1 & ; \ n \text{ je lih .} \end{cases}$$

   Ugotovi, ali je funkcija f injektivna in ali je surjektivna.

8. a) Poišči bijektivno funkcijo, ki interval $[1, 3]$ preslika na interval $[2, 5]$.
   b) Poišči bijektivno funkcijo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

9. Določi množici $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija $f : A \to B$ bijekcija in nato poišči inverzno funkcijo f^{-1}.

   a) $f(x) = \log(x - 2)$,
   b) $f(x) = \dfrac{x-1}{3-x}$,
   c) $f(x) = x^2 - 1$.

10. a) Pokaži, da je funkcija definirana s predpisom $f(x) = e^x - e^{-x}$ bijekcija iz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    Namig: $f(x) = e^x$ je bijekcija iz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.
    b) Pokaži, da funkcija definirana s predpisom $f(x) = e^x + e^{-x}$, ni injektivna.

11. Ali za realni funkciji f in g velja $f = g$, če je:

    a) $f(x) = \log x^2 \;\; , \;\; g(x) = 2\log(x)$,
    b) $f(x) = \sqrt{x^2} \;\; , \;\; g(x) = x$,
    c) $f(x) = \dfrac{x}{x} \;\; , \;\; g(x) = 1 \;\;$?

12. Določi naravna definicijska območja naslednjih funkcij:

    a) $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + e^{\frac{1}{x}}$,
    b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right) + \sqrt{2x+3}$,
    c) $f(x) = \log_{(2-x-x^2)} \dfrac{x+1}{3-x}$,
    d) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$,
    e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$,
    f) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)}$,
    g) $f(x) = \ln(x\ln(2-x))$,
    h) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$,
    i) $f(x) = \arccos\left(\log_2 \dfrac{2+x}{1+x}\right)$,
    j) $f(x) = \ln(x^3 + x^2 - x - 1) + \log(x+2)(x-3)(x-4)$,
    k) $f(x) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg} x\right)\right)$,

l) $f(x) = \arccos\left(\operatorname{tg}\dfrac{x+1}{x}\right)$.

13. a) Določi $f \circ g$ in $g \circ f$, če je $f(x) = e^x$ in $g(x) = x^2 - 1$.

   b) Določi $f \circ f \circ f$ in $D_{f\circ f\circ f}$, če je $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   c) Določi $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$, če je $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

14. Naj bodo A, B in C neprazne podmnožice $\mathbb{R}$ ter $f : A \to B$, $g : B \to C$ in $h = g \circ f : A \to C$ realne funkcije. Dokaži: Če je f surjektivna in h injektivna, potem je g injektivna.

15. Določi $f \circ g$, $g \circ f$, $D_{f\circ g}$ in $D_{g\circ f}$, če je $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 7x - 1$, $D_f = (-\infty, 3]$ in $D_g = [-3, \infty)$.

16. Določi $f(x)$ in D_f, če je $f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \sqrt{\ln x}$.

17. Dani sta funkciji:

$$f(x) = x^2 \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x > 1 \\ -1 & ; \quad x \leq 1\,. \end{cases}$$

Določi kompozitume $f \circ g$, $g \circ f$ in $g \circ g$.

18. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad |x| < \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

19. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & ; \quad x > 0 \\ x + 1 & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \geq 1 \\ -x & ; \quad x < 1\,. \end{cases}$$

Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

20. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; \quad x \leq 0 \\ 1 - x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x + 2 & ; \quad x \leq 0 \\ 3 - 2x & ; \quad 0 < x < 1\,. \\ 3x & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

21. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad x < 0 \\ 3x - 1 & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ e^x & ; \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x - \pi & ; \quad |x| > \pi \\ \sin^2 x & ; \quad |x| \leq \pi\,. \end{cases}$$

Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.