

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

1. V kompleksni ravnini skiciraj naslednje množice točk:

- a) $A = \{z \in \mathbb{C} ; |z + 1 + i| = 2\}$.
- b) $B = \{z \in \mathbb{C} ; 2 < |z - 1| < 3 , \operatorname{Re}(z) \geq 2\}$.
- c) $C = \{z \in \mathbb{C} ; |\bar{z} - i| = 2\}$.
- d) $D = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) > 1\}$.
- e) $E = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z| < 1 , |z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|\}$.

2. V kompleksni ravnini skiciraj vsa kompleksna števila z , ki zadoščajo naslednjim pogojem:

- a) $iz + z\bar{z} = \frac{3}{4} - i$.
- b) $|z - i| = |z + 1|$.
- c) $|\operatorname{Re}(z) + 1| = |z - 1|$.
- d) $|z - 3| + |z + 3| = 10$.
- e) $|2z - i(z + 1)| \geq \sqrt{5}$.

3. Poišči vse kompleksne rešitve enačbe:

- a) $\bar{z} = z^2$.
- b) $z^2 - i\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = 1 - z$.

Polarni zapis kompleksnega števila

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n velja:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

2. Kompleksna števila: $3, 2i, -1, -\sqrt{3} + 3i$ in $\frac{2(5+i)}{3-2i}$ predstavi s pomočjo polarne zapisa.

- 3. a) Izračunaj $(3 + i\sqrt{3})^{2004}$.
- b) Ugotovi, za katera naravna števila n je kompleksno število $(3+i\sqrt{3})^n$ realno.

4. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe:

$$2z^4 + 18z^2 + (1 - i\sqrt{3})(z^2 + 9) = 0.$$

5. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe:

a) $z^3 - i\sqrt{27} = 0$

b) $z^4 = (2 + 2i)^8$

c) $(\bar{z} + 2i)^2 = -\frac{1}{4}(z - 2i)^4$

in jih predstavi v kompleksni ravnini.

6. V kompleksni ravnini skiciraj naslednje množice točk:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}\}.$

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \left| \left(\frac{z}{|z|} \right)^6 - 1 \right| = 2 \right\}.$