Naloge za predmet *Teorija množic*

5. skupina nalog: dobra ureditev

1. Ugotovite, ali so naslednje množice dobro urejene:
   (a) Množica $\mathbf{Z}$ vseh celih števil z naravno ureditvijo;
   (b) Množica $\mathbf{Q}$ vseh racionalnih števil z naravno ureditvijo;
   (c) Množica $\mathbf{R}$ vseh realnih števil z naravno ureditvijo;
   (d) Množica $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ z naravno ureditvijo?

2. Na $\mathbf{N}$ je definirana ureditev $\prec$ na naslednji način:

$$n \prec m \Leftrightarrow \begin{array}{l} (n \text{ je sodo in } m \text{ je liho}) \text{ ali} \\ (n \text{ in } m \text{ sta sodi in } n < m) \text{ ali} \\ (n \text{ in } m \text{ sta lihi in } n < m). \end{array}$$

   (a) Dokažite, da je $(\mathbf{N}, \prec)$ dobro urejena množica.
   (b) Poiščite injektivno naraščajočo funkcijo $f : (\mathbf{N}, <) \longrightarrow (\mathbf{N}, \prec)$.
   (c) Pokažite, da ne obstaja injektivna naraščajoča funkcija $g : (\mathbf{N}, \prec) \longrightarrow (\mathbf{N}, <)$.
   (d) Primerjajte (po velikosti, glede na ureditev ordinalnih števil) ordinalni števili $[(\mathbf{N}, \prec)]$ in $[(\mathbf{N}, <)]$.

3. Na množici $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definiramo ureditev $\preceq$ na naslednji način:

$$(x, y) \preceq (s, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} (x + y \text{ sodo } \& \ s + t \text{ liho }) & \vee \\ ((x + y \text{ sodo } \& \ s + t \text{ sodo }) & \& \\ (x + y < s + t \vee (x + y = s + t \ \& \ x \leq s))) & \vee \\ ((x + y \text{ liho } \& \ s + t \text{ liho }) & \& \\ (x < s \vee (x = s \ \& \ y \leq t))). & \end{array}$$

   Preverite, ali je urejena množica $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \preceq)$ dobro urejena in izračunajte njen ordinalni tip.

4. Na množici $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definiramo ureditev $\preceq$ na naslednji način:

$$(m, n) \preceq (p, q) \Leftrightarrow m < p \vee (m = p \,\&\, n \leq q).$$

   Dokažite, da je $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \preceq)$ dobro urejena množica. Je njen ordinalni tip enak ω^2? Dokažite trditev.

5. Na $\mathbf{Z}$ je definirana ureditev $\prec$ s formulo

$$u \prec v \Leftrightarrow |u| < |v| \vee (|u| = |v| \,\&\, u < v).$$

   Dokažite, da je $(\mathbf{Z}, \prec)$ dobro urejena množica in da je njen ordinalni tip enak ω.

6. Pokažite, da v vsaki dobro urejeni množici vsak element, razen največjega (če le-ta obstaja), ima neposrednega naslednika.

7. Poiščite primer urejne množice v kateri vsak element ima neposrednega naslednika, ki pa ni dobro urejena.

8. (*Princip transfinitne indukcije*) Naj bo K dobro urejena množica in J njena podmnožica, za katero za vsak $\alpha \in K$ velja: $K_\alpha \subset J \Rightarrow \alpha \in J$. Tedaj je $J = K$. (Tukaj K_α označuje začetni del $\{x \in K : x < \alpha\}$ množice K.)

9. Ali lahko v dobro urejeni množici obstaja neskončno zaporedje $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$?

10. Dokažite, da je linearno urejena množica dobro urejena natanko takrat, kadar ne vsebuje podmnožice z ordinalnim tipom ω^*.

11. Opišite dobro urejeno množico, ki ima natanko 5 limitnih elementov. Opišite dobro urejeno množico, ki ima natanko $\aleph_0$ limitnih elementov.

12. Če je $(X, \leq)$ dobro urejena množica, tedaj je tudi množica Y vseh njenih limitnih elementov dobro urejena (glede na relacijo $\leq \cap (Y \times Y)$). Poiščite takšen X, da bo množica Y imela ordinalni tip $\omega + 1$.

13. Opišite en primer dobro urejene množice X, za katero bo veljalo, da množica limitnih elementov množice limitnih elementov množice X ima natanko 3 elemente.