Naloge za predmet *Teorija množic*

3. skupina nalog: funkcije

1. Naj bo $f : A \to B$ funkcija in $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$. Pokažite, da velja $f^{-1}(f(A_0)) \supseteq A_0$ in da velja enakost, če je f injektivna. Pokažite tudi, da je $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$ in da velja enakost, če je f surjektivna.

2. Naj bo $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ podana s $f(x) = 3x^2 + 2$. Določite $f^{-1}(f([0,1]))$ in $f(f^{-1}([0,5]))$.

3. Naj bo $f : A \longrightarrow B$ funkcija in $A_i \subseteq A$, $B_i \subseteq B$, za $i = 0$ ter $i = 1$. Pokažite, da f^{-1} ohranja inkluzije, unije, preseke in razlike množic:

   (a) $B_0 \subseteq B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subseteq f^{-1}(B_1)$.

   (b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.

   (c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.

   (d) $f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)$.

   Pokažite, da f ohranja samo inkluzije in unije:

   (e) $A_0 \subseteq A_1 \Rightarrow f(A_0) \subseteq f(A_1)$.

   (f) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.

   (g) $f(A_0 \cap A_1) \subseteq f(A_0) \cap f(A_1)$; s primerom pokažite, da obratna inkluzija v splošnem ne velja.

   (h) $f(A_0 \setminus A_1) \supseteq f(A_0) \setminus f(A_1)$; s primerom pokažite, da obratna inkluzija v splošnem ne velja.

4. Pokažite, da lastnosti (b), (c), (f) in (g) iz prejšnje naloge veljajo tudi za poljubne unije in preseke.

5. Naj bosta $f : A \longrightarrow B$ in $g : B \longrightarrow C$ funkciji.

   (a) Naj bo $\mathbf{C}_0 \subseteq C$. Dokažite, da je $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

   (b) Dokažite, da je $g \circ f$ injektivna, če sta f in g injektivni.

   (c) Kaj lahko povemo o injektivnosti f in g, če je $g \circ f$ injektivna?

   (d) Dokažite, da je $g \circ f$ surjektivna, če sta f in g surjektivni.

   (e) Kaj lahko povemo o surjektivnosti f in g, če je $g \circ f$ surjektivna?

   (f) Formulirajte podobne trditve oz. vprašanja o bijektivnih funkcijah.

6. Funkciji $i_C : C \longrightarrow C$, definirani s formulo $\forall x \in C, i_C(x) = x$, pravimo *identična funkcija* ali *identiteta* na množici C. Za poljubno funkcijo $f : A \longrightarrow B$ pravimo, da je $g : B \longrightarrow A$ njen *levi inverz*, če je $g \circ f = i_A$, in da je $h : B \longrightarrow A$ njen *desni inverz*, če je $f \circ h = i_B$.

   (a) Dokažite: če ima f vsaj en levi inverz, tedaj je f injektivna; če ima f vsaj en desni inverz, tedaj je f surjektivna.

   (b) Poiščite primer funkcije, ki ima levi inverz, nima pa desnega.

(c) Poiščite primer funkcije, ki ima desni inverz, nima pa levega.

(d) Ali ima lahko funkcija več različnih levih inverzov? Kaj pa desnih?

(e) Dokažite: če je g levi inverz in h desni inverz funkcije f, tedaj je funkcija f bijektivna in velja $g = h = f^{-1}$.

7. Naj bo $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija, podana s $\forall x, f(x) = x^3 - x$. Z zoževanjem domene in kodomene napravite zožitev g funkcije f, ki bo bijektivna. Narišite grafa funkcij g in g^{-1}. (Opomba: obstaja več možnih izbir za g.)

8. Poiščite bijekcijo iz $A \times B$ na $B \times A$.

9. Poiščite bijekcijo iz $A_1 \times \cdots \times A_n$ na $(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$, za $n > 1$.

10. Podani sta bijektivni preslikavi $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$. Ugotovite, ali je funkcija $h : X \longrightarrow Y \times Z$, definirana s formulo

$$\forall x \in X,\ h(x) = (f(x), g(x))$$

a) injektivna; b) surjektivna.

11. Naj bosta $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ bijekciji. Opišite bijekcije

(a) med $A \cup C$ in $B \cup D$, če je $A \cap C = B \cap D = \emptyset$;

(b) med $A \times C$ in $B \times D$;

(c) med C^A in D^B. Pri tem je $Y^X = \{f | f : X \longrightarrow Y\}$ oznaka za množico vseh funkcij iz X v Y.

12. Podane so neprazne množice A, B in C za katere velja $B \subseteq A$. Dokažite: če obstaja bijekcija $f : B \cup C \longrightarrow B$, tedaj obstaja tudi bijekcija $g : A \cup C \longrightarrow A$.

13. Konstruirajte bijekcije

(a) med $\langle 0, 1\rangle$ in $\langle 5, 13\rangle$;

(b) med $\langle 0, 1\rangle$ in $[0, 1]$;

(c) med $[0, 1]$ in $\mathbf{R}$;

(d) med $\mathbf{Z} \cup [0, 1]$ in $[0, 1]$;

(e) med $[0, 1]$ in $\mathbf{R} \setminus [0, 1]$;

(f) med $\langle 0, 1] \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$ in $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$;

(g) med $[-1, 1] \times [-1, 1]$ in $(\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle) \setminus \{(0, 0)\}$;

(h) med $\mathbf{R} \times \langle 0, 1]$ in $\langle -1, 1\rangle \times [0, 1\rangle$;

(i) med $\mathbf{R}^2$ in $[0, 1]^2$;

(j) med $\mathbf{R}^2$ in $[0, 1] \times [0, 1]$;

(k) med $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ in $\langle 0, 1\rangle \times \{1, 2\}$;

(l) med $[-1, 1]$ in $\langle 0, 1] \times \{0, 1\}$;

(m) med $[-1, 1]$ in $[-1, 1] \setminus \{0\}$;

(n) med $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ in $\langle 0,1\rangle \times \mathbf{Z}$;

(o) med $\mathbf{R}$ in $\langle 0,1] \times \mathbf{Z}$;

(p) med $\mathbf{R}$ in $[0,1] \times \mathbf{Z}$.

14. Eksplicitno opišite eno bijekcijo med odprtim krogom $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\}$ in zaprtim krogom $L = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$.

15. Eksplicitno opišite eno bijekcijo med množicama $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ in $\langle -1,1\rangle \setminus \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$.

16. Naj bo $X = \{(x,y) \colon x^2 > y\}$, $Y = \{(x,y) \colon x^2 < y\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

17. Naj bo $X = \{(x,y) \colon x^2+y^2 < 1\}$, $Y = \{(x,y) \colon x^2+y^2 \leq 1\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

18. Naj bo $\Delta = \{(x,x) \colon x \in \langle -1,1\rangle\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : (\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle) \setminus \Delta \longrightarrow (\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle) \setminus (\langle -1,1\rangle \times \{0\})$.

19. Naj bo $X = \{(x,y) \colon 0 < x,\ 0 < y,\ x+y < 1\}$, $Y = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

20. Eksplicitno opišite eno bijekcijo

$$f : \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [1, 2-1/n]\right) \times \langle 0, +\infty\rangle \longrightarrow [0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle.$$