Naloge za predmet *Teorija množic*

8. skupina nalog: kardinalna števila

1. Podane so neprazne množice A, B in C za katere velja $B \subseteq A$. Dokažite: če obstaja bijekcija $f : B \cup C \longrightarrow B$, tedaj obstaja tudi bijekcija $g : A \cup C \longrightarrow A$.

2. Dokažite tranzitivnost stroge ureditve kardinalnih števil (iz $a < b$ in $b < c$ sledi $a < c$).

3. (a) Dokažite, da za poljubno kardinalno število a velja $a \leq a^2$.
   (b) Poiščite kardinalni števili a_1 in a_2 tako, da bo veljalo $a_1 = a_1^2$ in $a_2 < a_2^2$.

4. (a) Dokažite, da za poljubna kardinalna števila a, b in c velja $a < b \Rightarrow a^c \leq b^c$.
   (b) Poiščite protiprimer za trditev $a < b \Rightarrow a^c < b^c$.

5. (a) Dokažite, da za poljubna kardinalna števila a, b in c velja $a < b \Rightarrow a + c \leq b + c$.
   (b) Poiščite protiprimer za trditev $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

6. Naslednji trditvi se nanašata na poljubna kardinalna števila a, b, c:

   (a) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.
   (b) $a < b \Rightarrow ac < bc$.

   Za vsako trditev ločeno ugotovite, ali je resnična ali ne. Če je resnična, trditev dokažite, če pa ni, najdite protiprimer.

7. Naj bo $\sim_1$ ekvivalenčna relacija na množici X, $\sim_2$ ekvivalenčna relacija na množici Y, ter $f : X/{\sim_1} \longrightarrow Y/{\sim_2}$ podana bijekcija. Dokažite: če za vsak $x \in X$ velja $|[x]| = |f([x])|$, tedaj je $|X| = |Y|$.

8. Določite moč množice vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \{0, 1\}$, za katere je

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty.$$

9. Dokažite, da sta množici $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ in $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$ enakomočni

   (a) s pomočjo kardinalne aritmetike;
   (b) z eksplicitno konstrukcijo bijekcije med njima.

   ($\mathcal{P}(X)$ označuje potenčno množico množice X.)

10. (a) Dokažite: $c\aleph_0 = c$.
    (b) Dokažite, da množica vseh zaporedij realnih števil ima strogo manjšo moč kot množica $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

11. (a) Opišite eno bijekcijo

$$f : ([-1, 1] \times [-1, 1]) \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \langle -1, 1\rangle \times [-1, 1].$$

(b) S pomočjo kardinalne aritmetike izračunajte moč množic
$([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(0,0)\}$, $\langle -1,1 \rangle \times [-1,1]$.

12. Določite moč množice F vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \{0,1\}$, ki "skoraj povsod" imajo vrednost 0 (torej takih, za katere obstaja tako število $N \in \mathbf{N}$, da za vse $n \geq N$ velja $f(n) = 0$).

13. Dokažite, da je moč množice vseh zaporedij naravnih števil enaka c.

14. Naj bo $X = [-1,1] \times [-1,1]$, $Y = \{(x,y) \in X : |x| = 1 \vee |y| = 1\}$. Dokažite, da sta množici X in Y enakomočni.

15. Izračunajte moč množice vseh premic v ravnini ter moč množice vseh ravnin v prostoru. Katera je večja?

16. Določite moč množice vseh števnih podmnožic množice $\mathbf{R}$.

17. Določite moč množice vseh zaporedij elementov iz potenčne množice $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

18. Naj bo X množica vseh zaporedij elementov iz $\mathbf{R}$. Določite moč množice vseh zaporedij elementov iz X.

19. Katera množica ima več elementov: množica X vseh funkcij iz $\mathbf{Q}$ v $\mathbf{R}$ ali množica Y vseh funkcij iz $\mathbf{R}$ v $\mathbf{Q}$?

20. Katera množica ima več elementov: množica X vseh zaporedij funkcij iz $\mathbf{Q}$ v $\mathbf{R}$ ali množica Y vseh funkcij iz množice vseh zaporedij v $\mathbf{Q}$ v množico $\mathbf{R}$?

21. Katera množica ima več elementov: množica X vseh zaporedij v $\mathbf{Q}$ ali množica Y vseh zaporedij v $\mathbf{R}$?