Naloge za predmet *Teorija množic*

2. skupina nalog: operacije z množicami, končni produkti

1. Preverite, katera izmed naslednjih trditev je resnična za poljubne množice A, B, C, D. Če ekvivalenca ni resnična, preverite resničnost posameznih implikacij. Podobno, če enakost množic ne drži, preverite posamezne inkluzije.

   (a) $A \supseteq C \,\&\, B \supseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) \supseteq C$.

   (b) $A \supseteq C \vee B \supseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) \supseteq C$.

   (c) $A \supseteq C \,\&\, B \supseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cap B) \supseteq C$.

   (d) $A \supseteq C \vee B \supseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cap B) \supseteq C$.

   (e) $A \setminus (A \setminus B) = B$.

   (f) $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$.

   (g) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

   (h) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

   (i) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$.

   (j) $A \subseteq C \,\&\, B \subseteq D \;\Rightarrow\; (A \times B) \subseteq (C \times D)$.

   (k) Obrat implikacije (j).

   (l) Obrat implikacije (j), če predpostavljamo, da sta množici A in B neprazni.

   (m) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

   (n) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

   (o) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

   (p) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \times C) \setminus (B \times C)) \setminus (A \times D)$.

   (q) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.

2. Naj bodo podane množice A, B in C. Izrazite naslednje množice s pomočjo simbolov A, B, C, $\cap$, $\cup$ in $\setminus$: $D = \{x \colon x \in A \,\&\, (x \in B \vee x \in C)\}$, $E = \{x \colon (x \in A \,\&\, x \in B) \vee x \in C\}$ in $F = \{x \colon x \in A \,\&\, (x \in B \;\Rightarrow\; x \in C)\}$.

3. Dokažite, da za poljubne a, b, c, d velja $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \;\Leftrightarrow\; a = c \,\&\, b = d$.

4. Dokažite, da obstajajo množice A, B in C, za katere velja $A \times B \neq B \times A$ in $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

5. Naj bo $\mathbf{R}$ množica realnih števil. Za vsako izmed naslednjih podmnožic produkta $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ določite, ali je produkt dveh podmnožic množice $\mathbf{R}$:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \colon x \in \mathbf{Z}\}$.

   (b) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \colon 0 < y \leq 1\}$.

   (c) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \colon y > x\}$.

   (d) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \colon x \notin \mathbf{Z},\, y \in \mathbf{Z}\}$.

   (e) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

6. Določite, katere izmed naslednjih trditev in njim obratnih trditev, so resnične:

   (a) $x \in \cup_{A \in \mathcal{A}} A \;\Rightarrow\; x \in A$ za vsaj en $A \in \mathcal{A}$.
   (b) $x \in \cup_{A \in \mathcal{A}} A \;\Rightarrow\; x \in A$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.
   (c) $x \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A \;\Rightarrow\; x \in A$ za vsaj en $A \in \mathcal{A}$.
   (d) $x \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A \;\Rightarrow\; x \in A$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.

   Kako ste kvantificirali x? Napišite kontrapozicije vseh teh trditev.

7. Dokažite:

   (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
   (b) $\mathcal{P}(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$.
   (c) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 \,\mathbf{:}\, A_1 \in \mathcal{P}(A) \,\&\, B_1 \in \mathcal{P}(B)\}$.
   (d) $\mathcal{P}(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \{\bigcup\limits_{i \in I} B_i \,\mathbf{:}\, \forall i \in I, B_i \in \mathcal{P}(A_i)\}$.

8. Dokažite, da je

   (a) $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$ najmanjša množica, ki vsebuje vse množice A_t.
   (b) $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$ največja množica, ki je vsebovana v vseh množicah A_t.

9. Dokažite, da je vsaka množica enaka

   (a) uniji vseh svojih podmnožic;
   (b) uniji vseh svojih končnih podmnožic;
   (c) uniji vseh svojih enoelementnih podmnožic.

10. Izračunajte

    (a) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} [0, 1 - 1/n]$,
    (b) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} \langle 0, 1 - 1/n]$,
    (c) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} [0, 1 - 1/n\rangle$.

    Pri vsakem odgovoru vključite tudi dokaz, da je pravilen.

11. Izračunajte

    (a) $\bigcup\limits_{x,y \in \mathbf{R},\, a<x<y<b} [x, y]$,
    (b) $\bigcup\limits_{x,y \in \mathbf{R},\, a<x<y<b} \langle x, y]$,

(c) $\displaystyle\bigcup_{x,y\in\mathbf{R},\, a<x<y<b} [x,y\rangle.$

Pri vsakem odgovoru vključite tudi dokaz, da je pravilen.

12. Dokažite:

$$(\bigcup_{k\in K} A_k) \times (\bigcup_{t\in T} B_t) = \bigcup_{(k,t)\in K\times T} (A_k \times B_t).$$

13. Dokažite naslednje identitete:

(a) $\displaystyle\bigcup_{k\in K}\bigcup_{t\in T} A_{kt} = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{k\in K} A_{kt}.$

(b) $\displaystyle\bigcap_{k\in K}\bigcap_{t\in T} A_{kt} = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{k\in K} A_{kt}.$

(c) $\displaystyle\left(\bigcup_{k\in K} A_k\right)^c = \bigcap_{k\in K} A_k^c.$

(d) $\displaystyle\left(\bigcap_{k\in K} A_k\right)^c = \bigcup_{k\in K} A_k^c.$

(e) $\displaystyle\bigcup_{k\in K} A_k \cup \bigcup_{k\in K} B_k = \bigcup_{k\in K} (A_k \cup B_k).$

(f) $\displaystyle\bigcup_{k\in K} (B \cap A_k) = B \cap \left(\bigcup_{k\in K} A_k\right).$

(g) $\displaystyle\bigcap_{k\in K} (B \cup A_k) = B \cup \left(\bigcap_{k\in K} A_k\right).$