Teorija množic

Vzorci pisni izpitov in kolokvijev

26.3.97

1. Dani sta množici A in B. Ugotovite, kdaj je enačba $(X+A)\cap(B\setminus X)=A+B+X$ rešljiva in v tem primeru poiščite rešitev. Znak $+$ pomeni simetrično razliko množic ($A+B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$).
2. Eksplicitno določite eno bijekcijo med $\mathbf{R}$ in $[0,1]\times\mathbf{Z}$.
3. Določite moč množice vseh funkcij $f:\mathbf{N}\longrightarrow\{0,1\}$, za katere je
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)<\infty.$$

Pripravil Uroš Milutinović

14.5.97

1. Eksplicitno določite eno bijekcijo med $[0,1]$ in $\mathbf{R}\setminus[0,1]$.
2. Dokažite, da za poljubne množice A, B, C velja:
$$|A|<|B| \,\&\, |B|<|C| \;\Rightarrow\; |A|<|C|.$$
3. Primerjajte ordinalni števili $\omega(\omega+1)(\omega+2)$ in $(\omega+2)(\omega+1)\omega$.

Pripravil Uroš Milutinović

23.6.1997

1. Eksplicitno opišite eno bijekcijo med odprtim krogom
$K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ in zaprtim krogom
$L=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.
2. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo
$$\forall x,y\in\mathbf{R},\ x\sim y \;\Leftrightarrow\; x-y\in\mathbf{Z}.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.
3. Dokažite, da za poljubna ordinalna števila α, β, γ velja
$\beta<\gamma \;\Rightarrow\; \alpha\beta<\alpha\gamma$.

Pripravil Uroš Milutinović

16.9.1997

1. Eksplicitno opišite eno bijekcijo med ravnino $\mathbf{R}^2$ in zaprtim kvadratom $[0,1]\times[0,1]$.
2. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo
$$\forall x,y\in\mathbf{R},\ x\sim y \;\Leftrightarrow\; \sin x-\sin y\in\mathbf{Z}.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.
3. Dokažite, da za poljubno ordinalno število α velja $\alpha\le\alpha^2$. Določite, v katerih primerih velja enakost in v katerih stroga neenakost.

Pripravil Uroš Milutinović

6.11.1997

1. Naslednji trditvi se nanašata na poljubna kardinalna števila a, b, c:

   (a) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

   (b) $a < b \Rightarrow ac < bc$.

   Za vsako trditev ločeno ugotovite, ali je resnična ali ne. Če je resnična, trditev dokažite, če pa ni, najdite protiprimer.

2. Najdite dobro urejeno množico, v kateri množica limitnih elementov ima tip $\omega + 1$.

3. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : T \longrightarrow K$ med trikotnikom $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x \leq 1, x + y \leq 1\}$ in kvadratom $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

Pripravil Uroš Milutinović

12.2.1998

1. Dokažite, da sta množici $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ enakomočni.

2. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha = 1+\omega^2+\omega$, $\beta = 1+\omega+\omega^2$, $\gamma = \omega^2+1+\omega$, $\delta = \omega+1+\omega^2$, $\varepsilon = \omega^2 + \omega + 1$, $\zeta = \omega + \omega^2 + 1$.

3. Za realni števili a, b definiramo: $a \prec b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b - a > 0 \;\&\; b - a \in \mathbf{Q}$. Pokažite, da je $\prec$ stroga delna ureditev na $\mathbf{R}$. Kaj so maksimalne linearno urejene podmnožice delno urejene množice $(\mathbf{R}, \prec)$?

Pripravil Uroš Milutinović

19.3.1998 (kolokvij)

1. Poiščite izjave A, B, C, ki bodo dokazovale, da izjava

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$$

   ni tavtologija.

2. Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$. (Opomba: Tega, da je opisana funkcija bijekcija, ni potrebno dokazovati, vendar, če želite, lahko na ta način opravite preizkus.)

3. Na $\mathbf{R}$ je definirana relacija $\sim$ na naslednji način: $a \sim b$ velja natanko takrat, kadar obstaja neničelni polinom P z realnimi koeficienti, tako da velja $P(a) = P(b) = 0$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in določite $\mathbf{R}/\!\sim$.

4. Na $\mathbf{R}^2$ je definirana relacija $\preceq$ na naslednji način: $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ velja natanko takrat, kadar je res

$$(y_1 - |x_1| < y_2 - |x_2|) \vee (y_1 - |x_1| = y_2 - |x_2| \,\&\, x_1 \leq x_2).$$

   Pokažite, da je $\preceq$ linearna ureditev in da je urejena množica $(\mathbf{R}^2, \preceq)$ izomorfna $\mathbf{R}^2$ z antileksikografsko ureditvijo. Podajte geometrijsko razlago ureditve $\preceq$.

Pripravil Uroš Milutinović

23.3.1998

1. Na $\mathbf{R}$ je definirana relacija $\sim$ na naslednji način: $a \sim b$ velja natanko takrat, kadar obstaja neničelni polinom P s celimi koeficienti, tako da velja $P(a) = P(b) = 0$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.
2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo
$$f : [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$
med zaprto in odprto kocko.
3. Dokažite, da je moč množice vseh zaporedij naravnih števil enaka c.
4. Dokažite, da za poljubna ordinalna števila α, β, γ velja $\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta$.

Pripravil Uroš Milutinović

11.5.1998

1. Na $\mathbf{R}^2$ je definirana relacija $\sim$ na naslednji način: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ velja natanko takrat, kadar je $y_1 - \sin x_1 = y_2 - \sin x_2$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in določite ekvivalenčni razred $[(\pi, \pi)]$.
2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo
$$f : ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \langle -1,1 \rangle \times \langle -1,1 \rangle.$$
3. Dokažite, da je moč množice vseh zaporedij v $\mathbf{R}^2$ enaka c.
4. Primerjajte po velikosti ordinalni števili $(\omega+1)^2$ in $(\omega+2)^2$. Če je α manjše in β večje izmed teh dveh števil, določite ordinalno število γ, tako da bo veljalo $\beta = \alpha + \gamma$.

Pripravil Uroš Milutinović

28.5.1998 (kolokvij)

1. Podani sta množici $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ in $\mathbf{N}^{\mathbf{R}}$. Ugotovite, katera ima več elementov.
2. Dokažite: aritmetičnih zaporedij realnih števil ima enako mnogo kot geometrijskih.
3. Dokažite, da za poljubno neskončno ordinalno število α velja
   (a) $\omega \leq \alpha$;
   (b) $1 + \alpha = \alpha$;
   (c) $\alpha + 1 > \alpha$.
4. Naj bo $\alpha = \omega^2 + \omega$, $\beta = \omega^2 + 1$, $\gamma = \omega^2 + \omega + 1$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ in $\gamma\alpha$.

Pripravil Uroš Milutinović

15.6.1998

1. Naj bo $\mathcal{P}$ množica vseh kvadratnih polinomov z realnimi koeficienti (torej, množica polinomov stopnje ≤ 2 skupaj z ničelnim polinomom). Na $\mathcal{P}$ je definirana relacija $\sim$ na naslednji način: $f \sim g$ velja natanko takrat, kadar je $f'(0) = g'(0)$.

(a) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

(b) Določite moč $[f]$ za $f \in \mathcal{P}$ ter moč $\mathcal{P}/\!\sim$.

Opomba: f', g' sta odvoda funkcij f, g.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \longrightarrow \langle 0, 1\rangle \times \mathbf{N}$.

3. Dokažite: vseh omejenih zaporedij realnih števil je enako mnogo kot vseh zaporedij realnih števil.

4. Za vsako izmed naslednjih dveh trditev ločeno ugotovite, ali je resnična ali ne. Če je resnična, jo dokažite, če je neresnična, navedite protiprimer.

   (a) Za poljubni ordinalni števili α, β velja $\omega + \alpha < \omega + \beta \;\Rightarrow\; \alpha < \beta$;

   (b) Za poljubni ordinalni števili α, β velja $\alpha + \omega < \beta + \omega \;\Rightarrow\; \alpha < \beta$.

Pripravil Uroš Milutinović

29.6.1998

1. Dokažite, da za poljubni kardinalni števili a in b velja trditev

$$a \le b \;\Rightarrow\; a^2 \le b^2.$$

2. Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \ge x^2\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \ge 0\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

3. Na množici $\mathbf{N}$ definirajte ureditev $\preceq$, tako da bo ordinalni tip urejene množice $(\mathbf{N}, \preceq)$ enak $\omega 3 + 5$.

4. Na množici $\mathbf{R}$ sta na naslednji način definirani relaciji $\sim_1$ in $\sim_2$:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, x \sim_1 y \overset{def}{\iff} x - y \text{ je sodo celo število;}$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, x \sim_2 y \overset{def}{\iff} x - y \text{ je liho celo število.}$$

Za vsak $i \in \{1, 2\}$ ugotovite, ali je $\sim_i$ ekvivalenčna relacija ali ne, in če je, določite moč njene faktorske množice.

Pripravil Uroš Milutinović

31.8.1998

1. Dokažite, da za poljubni kardinalni števili a in b $(a, b \neq 0, 1)$ velja trditev $a + b \le ab$. S primerom pokažite, da ni nujno res $a + b < ab$.

2. Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \ge |x|\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

3. Na množici $\mathbf{Z}$ definirajte dobro ureditev $\preceq$, tako da bo ordinalni tip urejene množice $(\mathbf{Z}, \preceq)$ enak $\omega 2 + 1$.

4. Na množici $\mathbf{R}^2$ je na naslednji način definirana relacija $\sim$:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2,\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \overset{def}{\iff} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in določite moč njene faktorske množice.

Pripravil Uroš Milutinović

29.10.1998

1. Dokažite: $|X| = |Y| \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)|$.
2. Naj bo $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ in $Y = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.
3. Dokažite, da za poljubno neskončno ordinalno število α velja neenakost $1 + \alpha + \alpha^2 < \alpha^3$.
4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow (x - y)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

Pripravil Uroš Milutinović

25.11.1998

1. Naslednji trditvi se nanašata na poljubna kardinalna števila a, b, c, d:

   (a) $a \leq b \;\&\; c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$.

   (b) $a < b \;\&\; c < d \Rightarrow ac < bd$.

   Za vsako trditev ločeno ugotovite, ali je resnična ali ne. Če je resnična, trditev dokažite, če pa ni, najdite protiprimer.
2. Opišite dobro urejeno množico, v kateri podmnožica vseh njenih limitnih elementov ima ordinalni tip $\omega + 1$. Je takšna dobro urejena množica enolično določena?
3. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow (f(x) - f(y)) \in \mathbf{Q},$$

kjer je $f(x) = x^7 - 3x^4 + x$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

Pripravil Uroš Milutinović

18.1.1999

1. Dokažite: $|X| \leq |Y| \Rightarrow |X \times X| \leq |Y \times Y|$.
2. Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$ in $Y = (\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle) \times \langle -1, 1\rangle$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.
3. Naj bo $\alpha = \omega + 1$, $\beta = \omega + 2$, $\gamma = \omega + 3$. Primerjajte po velikosti produkte $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\alpha\beta$, $\alpha\gamma\beta$, $\beta\gamma\alpha$.
4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbf{Z},\ z \leq x < z + 1 \;\&\; z \leq y < z + 1.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da je $\mathbf{R}/\!\sim$ števna množica.

Pripravil Uroš Milutinović

9.2.1999

1. Dokažite, da za poljubne množice X, Y, Z velja:

$$|X| \leq |Y| \Rightarrow |X \times Z| \leq |Y \times Z|.$$

S protiprimerom pokažite, da ne velja (za poljubne množice X, Y, Z):

$$|X| < |Y| \Rightarrow |X \times Z| < |Y \times Z|.$$

2. Izračunajte moč množice $M = \{f \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} : |f(\mathbf{N})| < \aleph_0\}$.

3. Eksplicitno opišite en izomorfizem urejenih množic $f : X \longrightarrow Y$, če je $X = \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, 2\rangle$, $Y = \langle -2, -1\rangle \cup [0, +\infty\rangle$, in sta obe množici podedovali standardno ureditev množice $\mathbf{R}$.

4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana na naslednji način: za poljubni $s \in \mathbf{R}$ velja $s \sim s$; za poljubni različni števili $s, t \in \mathbf{R}$ pa $s \sim t$ velja natanko takrat, kadar obstaja neničelni polinom $P(x)$ s celimi koeficienti, za katerega velja $P(s) = P(t) = 0$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da je $\mathbf{R}/\sim$ neštevna množica.

Pripravil Uroš Milutinović

10.3.1999 (kolokvij)

1. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija. Dokažite:
   (a) Če je f injekcija, tedaj za poljubni podmnožici $A, B \subseteq X$ velja $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.
   (b) Če f ni injekcija, ta trditev ne velja.
   (c) Če je f injekcija, tedaj za poljubno podmnožico $A \subseteq X$ velja $f^{-1}(f(A)) = A$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \times \mathbf{R} \longrightarrow Y \times \langle 0, 1\rangle$, če je $X = \{x \in [0, 2\pi] : \sin x > \frac{1}{2} \ \&\ \cos x \geq 0\}$, $Y = \{x \in \mathbf{R} : \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1\}$.

3. Določite množico $\mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{tg}(\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle))$.

4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow xy > 0 \ \vee\ x = y = 0.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter določite $\mathbf{R}/\sim$. Koliko elementov vsebuje $\mathbf{R}/\sim$?

Pripravil Uroš Milutinović

17.3.1999

1. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija. Dokažite, da je f surjekcija natanko takrat, kadar velja

$$\forall B \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(B)) = B.$$

2. Izračunajte moč množice $M = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}} : 0, x_1x_2x_3 \cdots \in \mathbf{Q}\}$. Pri tem $0, x_1x_2x_3 \cdots$ razumemo kot decimalni zapis realnega števila.

3. Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \geq 0\}$, $Y = \{(x, y) \in X : x, y \geq 0\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}^2$, definirana na naslednji način:

$$(x,y) \sim (x',y') \overset{def}{\iff} x+y = x'+y'.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, določite $[(x_0,y_0)]$ za poljubno točko iz $\mathbf{R}^2$, narišite to množico v ravnini ter dokažite, da je $\mathbf{R}^2/\sim$ neštevna množica.

Pripravil Uroš Milutinović

5.5.1999

1. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija. Dokažite, da je f injekcija natanko takrat, kadar velja

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(Y),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

2. Dokažite, da za poljubni kardinalni števili a in b velja $a^2b^2 = (ab)^2$.
3. Uredite po velikosti ordinalna števila $\omega^2(\omega+1)$, $\omega(\omega+1)\omega$, $(\omega+1)\omega^2$. Svoj odgovor utemeljite.
4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}^2$, definirana na naslednji način:

$$(x,y) \sim (x',y') \overset{def}{\iff} xyx'y' > 0 \vee (x,y) = (x',y').$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter določite $\mathbf{R}^2/\sim$ in $|\mathbf{R}^2/\sim|$.

Pripravil Uroš Milutinović

21.5.1999 (kolokvij)

1. Dokažite, da za poljubna kardinalna števila a, b, c velja

$$a < b \;\&\; b \le c \Rightarrow a < c.$$

2. Ugotovite, ali je množica $\{z \in \mathbf{C} : \exists n \in \mathbf{N}, z^n = 1\}$ števna ali ne. Svojo trditev dokažite.
3. Izračunajte moč množice vseh geometrijskih zaporedij realnih števil in moč množice vseh konvergentnih zaporedij realnih števil. Katera je večja?
4. Uredite po velikosti ordinalna števila $\omega^3(\omega+1)$, $\omega^2(\omega+1)\omega$, $\omega(\omega+1)\omega^2$, $(\omega+1)\omega^2$ in podajte razlago za svoj odgovor.

Pripravil Uroš Milutinović

9.6.1999

1. Podane so poljubne funkcije $f_1 : X \longrightarrow Y$, $f_2 : X \longrightarrow Z$ in $f : X \longrightarrow Y \times Z$, povezane na naslednji način:

$$\forall x \in X,\ f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Dokažite:

   (a) Če je funkcija f surjektivna, tedaj sta surjektivni tudi funkciji f_1 in f_2.
   (b) Obrat predhodne trditve ne velja.

2. Določite moč množice vseh strogo naraščajočih zaporedij realnih števil.
3. Uredite po velikosti naslednja ordinalna števila:
$(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+2)(\omega+3)(\omega+1)$, $(\omega+3)(\omega+1)(\omega+2)$. Svoj odgovor utemeljite.

4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}^2$, definirana na naslednji način:

$$(x, y) \sim (x', y') \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists z \in \mathbf{Z},\ z \leq x < z+1 \;\&\; z \leq x' < z+1\,.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, narišite elemente $\mathbf{R}^2/\!\sim$ in izračunajte $|\mathbf{R}^2/\!\sim|$.

Pripravil Uroš Milutinović

23.6.1999

1. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ funkcija in $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ njen graf. Dokažite: $|\Gamma_f| = |X|$.
2. Določite moč množice vseh števnih podmnožic množice $\mathbf{R}$.
3. Uredite po velikosti naslednja ordinalna števila:
$(\omega+1)(\omega+2)+(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+2)(\omega+3)+(\omega+1)(\omega+2)$, $(\omega+3)(\omega+1)+(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+2)(\omega+3)+(\omega+3)(\omega+1)$, $(\omega+3)(\omega+1)+(\omega+1)(\omega+2)$, $(\omega+1)(\omega+2)+(\omega+3)(\omega+1)$.
Svoj odgovor utemeljite.
4. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$, če sta podani množici $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq y^2\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq |x|\}$.

Pripravil Uroš Milutinović

25.8.1999

1. Naj bo X poljubna množica. Relacija R na $\mathcal{P}(X)$ je definirana s formulo

$$(s, t) \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} s \cap t = \emptyset.$$

Ugotovite, ali je R:

(a) refleksivna,
(b) simetrična,
(c) tranzitivna,
(d) antisimetrična.

Vsak odgovor podrobno utemeljite.

2. Določite moč množice vseh končnih podmnožic množice $\mathbf{R}$.
3. Dokažite, da za množenje in seštevanje ordinalnih števil velja naslednji distributivnostni zakon:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

4. Podani sta množici $X = \{x \in \mathbf{R} : \operatorname{tg} x > 1\}$ in $Y = \{x \in \mathbf{R} : \sin x > \frac{1}{2}\}$. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$.

Pripravil Uroš Milutinović

8.9.1999

1. Naj bo X poljubna množica. Relacija R na $\mathcal{P}(X)$ je definirana s formulo

$$(s, t) \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} |s \cap t| \leq \aleph_0.$$

Ugotovite, ali je R:

(a) refleksivna,
(b) simetrična,
(c) tranzitivna,
(d) antisimetrična.

Vsak odgovor podrobno utemeljite.

2. Izračunajte

(a) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [0, 1/n]$,

(b) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \langle 0, 1/n]$,

(c) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [0, 1/n\rangle$.

Pri vsakem odgovoru vključite tudi dokaz, da je pravilen.

3. Dokažite, da za poljubna neničelna ordinalna števila velja

$$\beta < \gamma \Rightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma.$$

4. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$.

Pripravil Uroš Milutinović

18.1.2000

1. Relacija $\sim$ na $\mathbf{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \overset{def}{\iff} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}^2/\!\sim$ ni števna množica.

2. Izračunajte

(a) $\bigcup_{x,y\in\mathbf{R},\, a<x<y<b} [x, y]$,

(b) $\bigcup_{x,y\in\mathbf{R},\, a<x<y<b} \langle x, y]$,

(c) $\bigcup_{x,y\in\mathbf{R},\, a<x<y<b} [x, y\rangle$.

Pri vsakem odgovoru vključite tudi dokaz, da je pravilen.

3. Opišite en primer dobro urejene množice X, za katero bo veljalo, da množica limitnih elementov množice limitnih elementov množice X ima natanko 3 elemente.

4. Naj bo $\alpha : X \longrightarrow Y$ podana bijekcija. Dokažite, da je funkcija $\varphi : \mathbf{R}^Y \longrightarrow \mathbf{R}^X$, definirana s formulo $\varphi(f) = f \circ \alpha$, $f \in \mathbf{R}^Y$, bijekcija.

Pripravil Uroš Milutinović

1.2.2000

1. Relacija $\sim$ na množici $\mathcal{P}$ vseh polinomov z realnimi koeficienti je definirana s formulo $f \sim g \overset{def}{\iff} f(0) = g(0)$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in določite moč $\mathcal{P}/\sim$.

2. Podani sta bijektivni preslikavi $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$. Ugotovite, ali je funkcija $h : X \longrightarrow Y \times Z$, definirana s formulo
$$\forall x \in X,\ h(x) = (f(x), g(x))$$
a) injektivna; b) surjektivna.

3. Naj bo $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $Y = \{(x, y) \in X : |x| = 1 \vee |y| = 1\}$. Dokažite, da sta množici X in Y enakomočni.

4. Naj bo $\alpha = \omega + 1$, $\beta = \omega$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$, $\beta\alpha\alpha$, $\beta\beta\alpha$, $\beta\alpha\beta$, $\alpha\beta\beta$.

Pripravil Uroš Milutinović

7.3.2000 (kolokvij)

1. Ugotovite ali je izjava
$$((A \,\&\, B) \vee ((A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee \neg B))) \Leftrightarrow (A \vee B)$$
tavtologija.

2. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija. Dokažite, da za poljubno družino $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ podmnožic kodomene velja
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).$$
Posebej preverite resničnost trditve v primeru $X = Y = \mathbf{R}$, $f = \sin$, $\Lambda = \mathbf{Z}$ ter $B_z = \{z\}$, za poljubni $z \in \mathbf{Z}$.

3. Eksplicitno opišite eno bijekcijo
$$f : \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [1, 2 - 1/n]\right) \times \langle 0, +\infty\rangle \longrightarrow [0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$

4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}^2$, definirana s formulo
$$\forall x, y, u, v \in \mathbf{R},\ (x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter določite $[(0, 1)]$ in $[(0, 0)]$. Pokažite, da obstaja bijekcija $f : \mathbf{R}^2/\sim \longrightarrow [0, +\infty\rangle$

Pripravil Uroš Milutinović

4.4.2000

1. Naj bo X poljubna množica. Relacija R na $\mathcal{P}(X)$ je definirana s formulo
$$(s, t) \in R \overset{def}{\iff} |(s \setminus t) \cap (t \setminus s)| \le \aleph_0.$$
Ugotovite, ali je R:
   (a) refleksivna,

(b) simetrična,
(c) tranzitivna,
(d) antisimetrična.

Vsak odgovor podrobno utemeljite.

2. Izračunajte

(a) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [0, 1-1/n]$,

(b) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \langle 0, 1-1/n]$,

(c) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [0, 1-1/n\rangle$.

Pri vsakem odgovoru vključite tudi dokaz, da je pravilen.

3. Dokažite, da za poljubni ordinalni števili α, β velja

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + 1 \leq \beta.$$

4. Naj bo $\alpha : X \longrightarrow Y$ podana bijekcija. Dokažite, da je $\varphi : X^{\mathbf{R}} \longrightarrow Y^{\mathbf{R}}$, definirana s formulo $\varphi(f) = \alpha \circ f$, $f \in X^{\mathbf{R}}$, bijekcija.

Pripravil Uroš Milutinović

9.4.2000

1. Dokažite:

$$(\bigcup_{k\in K} A_k) \times (\bigcup_{t\in T} B_t) = \bigcup_{(k,t)\in K\times T} (A_k \times B_t).$$

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow [0,1]^2$.

3. Dokažite, da za poljubni ordinalni števili α, β velja

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \omega \leq \beta + \omega.$$

Poiščite protiprimer za trditev

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \omega < \beta + \omega.$$

4. Naj bo $\alpha : X \longrightarrow Y$ podana bijekcija. Dokažite, da je $\varphi : \mathbf{R}^Y \longrightarrow \mathbf{R}^X$, definirana s formulo $\varphi(f) = f \circ \alpha$, $f \in \mathbf{R}^Y$, bijekcija.

Pripravil Uroš Milutinović

25.5.2000 (kolokvij)

1. Naj bo $\sim_1$ ekvivalenčna relacija na množici X, $\sim_2$ ekvivalenčna relacija na množici Y, ter $f : X/\sim_1 \longrightarrow Y/\sim_2$ podana bijekcija. Dokažite: če za vsak $x \in X$ velja $|[x]| = |f([x])|$, tedaj je $|X| = |Y|$.

2. Ugotovite, ali je množica

$$\{x \in \mathbf{N} : \exists n \in \mathbf{N},\ n\cos^7 x - \cos^3 x = \cos^{12} x + \cos x - 1\}$$

števna ali ne. Svojo trditev tudi dokažite.

3. Izračunajte moč množice vseh premic v ravnini ter moč množice vseh ravnin v prostoru. Katera je večja?

4. Naj bo $\alpha = \omega^2$, $\beta = \omega^2 + 1$ in $\gamma = \omega^2 + \omega$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\alpha\beta$, $\beta\alpha\gamma$, $\beta\gamma\alpha$ in $\gamma\beta\alpha$ ter podajte razlago za svoj odgovor.

Pripravil Uroš Milutinović

13.6.2000

1. Naj bosta $\sim_1$ in $\sim_2$ podani ekvivalenčni relaciji na X.

   (a) Ugotovite, ali je relacija R, definirana s formulo
   $$\forall x, y \in X,\ xRy \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \sim_1 y) \vee (x \sim_2 y),$$
   ekvivalenčna relacija na X.

   (b) Ugotovite, ali je relacija S, definirana s formulo
   $$\forall x, y \in X,\ xSy \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \sim_1 y) \,\&\, (x \sim_2 y),$$
   ekvivalenčna relacija na X.

2. (a) Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{N} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{N}$.

   (b) Opišite linearno ureditev $\preceq$ na množici $\mathbf{N} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$, tako da bo ordinalni tip urejene množice $(\mathbf{N} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N}), \preceq)$ enak ω.

3. Določite moč množice vseh števnih podmnožic množice $\mathbf{R}$.

4. Naj bosta $\alpha : A \longrightarrow X$, $\beta : B \longrightarrow Y$ podani bijekciji. Dokažite, da je funkcija $\varphi : Y^X \longrightarrow B^A$, definirana s formulo $\varphi(f) = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$, $f \in Y^X$, bijekcija.

Pripravil Uroš Milutinović

27.6.2000

1. Naj bo $\sim_1$ ekvivalenčna relacija na X in $\sim_2$ ekvivalenčna relacija na Y.

   (a) Na $X \times Y$ definiramo relacijo $\sim$ s formulo
   $$\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall y_1, y_2 \in Y,\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_1 \sim_1 x_2) \,\&\, (y_1 \sim_2 y_2).$$
   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $X \times Y$.

   (b) Dokažite, da velja
   $$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ [(x, y)] = [x]_1 \times [y]_2,$$
   kjer je
   — $[(x, y)]$ ekvivalenčni razred elementa (x, y) glede na relacijo $\sim$,
   — $[x]_1$ ekvivalenčni razred elementa x glede na relacijo $\sim_1$,
   — $[y]_2$ ekvivalenčni razred elementa y glede na relacijo $\sim_2$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \longrightarrow \langle 0, 1\rangle \times \mathbf{Z}$.

3. Določite moč množice vseh zaporedij elementov iz potenčne množice $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

4. Naj bosta $\alpha = \omega 2 + 3$, $\beta = \omega 3 + 2$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta$, $\beta\alpha\alpha$, $\beta\beta\alpha$, $\beta\alpha\beta$, $\alpha\beta\beta$.

Pripravil Uroš Milutinović

29.8.2000

1. Podani sta linearno urejeni množici $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$. Na kartezičnem produktu $A \times B$ definiramo relacijo $\preceq$ na naslednji način:

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a_1 \leq_A a_2 \;\&\; b_1 \leq_B b_2.$$

   (a) Dokažite, da je $(A \times B, \preceq)$ delno urejena množica.

   (b) Dokažite, da $(A \times B, \preceq)$ ni linearno urejena množica, če je $|A| \geq 2$ in $|B| \geq 2$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{R} \longrightarrow \langle 0, 1] \times \mathbf{Z}$.

3. Naj bo $\alpha = \omega$, $\beta = \omega 2$, $\gamma = \omega 3$. Dokažite, da za vsako naravno število n velja

$$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n.$$

4. Naj bo X množica vseh zaporedij elementov iz $\mathbf{R}$. Določite moč množice vseh zaporedij elementov iz X.

Pripravil Uroš Milutinović

12.9.2000

1. Naj bo $X = \mathcal{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ množica vseh nepraznih podmnožic množice $\mathbf{R}$. Na X definiramo relacijo $\preceq$ na naslednji način:

$$A \preceq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b.$$

   Ugotovite ali je relacija $\preceq$:

   (a) refleksivna;

   (b) antisimetrična;

   (c) tranzitivna;

   (d) sovisna.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle \times \{1, 2\}$.

3. Z matematično indukcijo po n dokažite, da za poljubni naravni števili m, n velja $(\omega m)^n = \omega^n m$.

4. Katera množica ima več elementov: množica X vseh funkcij iz $\mathbf{Q}$ v $\mathbf{R}$ ali množica Y vseh funkcij iz $\mathbf{R}$ v $\mathbf{Q}$?

Pripravil Uroš Milutinović

28.11.2000

1. Naj bo $X_n = \{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{n} < \sin x < \frac{1}{n}\}$. Določite $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} X_n$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle \times \{0, 1, 2\}$.

3. Z matematično indukcijo po n dokažite, da za poljubni naravni števili m, n velja $(\omega + m)n = \omega n + m$.

4. Katera množica ima več elementov: množica X vseh zaporedij funkcij iz $\mathbf{Q}$ v $\mathbf{R}$ ali množica Y vseh funkcij iz množice vseh zaporedij v $\mathbf{Q}$ v množico $\mathbf{R}$?

Pripravil Uroš Milutinović

2.3.2001 (kolokvij)

1. Ugotovite ali je izjava

$$((\neg(A \,\&\, B) \vee C) \Rightarrow (C \,\&\, \neg B)) \Leftrightarrow (((A \,\&\, B) \vee C) \,\&\, \neg(B \,\&\, C))$$

tavtologija.

2. Naj bo $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija podana s predpisom $f(x) = \sin 2x + 1$. Določite množico

$$f^{-1}(f(\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle)).$$

3. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : X \longrightarrow Y$, če sta podani množici $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^3 < y\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > \cos x\}$.

4. Naj bo $\preceq$ relacija na $\mathbf{R}^2$, definirana s formulo

$$\forall x, y, u, v \in \mathbf{R},\ (x, y) \preceq (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} (x^2 + y^2 < u^2 + v^2) \\ \vee \\ (x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \,\&\, x + y < u + v) \\ \vee \\ (x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \,\&\, x + y = u + v \,\&\, x \le u). \end{array}$$

Dokažite, da je $\preceq$ linearna ureditev na $\mathbf{R}^2$ ter glede na to ureditev določite maksimum množice $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Pripravil Uroš Milutinović

27.3.2001

1. Podani sta funkciji $f : X \longrightarrow Y$ in $g : Y \longrightarrow Z$. Dokažite:
   (a) če je $g \circ f$ surjektivna, tedaj je surjektivna tudi funkcija g;
   (b) če je $g \circ f$ injektivna, tedaj je injektivna tudi funkcija f.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{R} \setminus [0, 1] \longrightarrow \langle 0, 1\rangle \times \{1, 2\}$.

3. Na $\mathbf{Z}$ je definirana relacija $\preceq$ s formulo

$$x \preceq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (|x| < |y|) \vee (|x| = |y| \,\&\, y < 0 < x) \vee (x = y).$$

Dokažite, da je
   (a) $\preceq$ linearna ureditev;
   (b) $(\mathbf{Z}, \preceq)$ dobro urejena množica.

4. Katera množica ima več elementov: množica X vseh zaporedij v $\mathbf{Q}$ ali množica Y vseh zaporedij v $\mathbf{R}$?

Pripravil Uroš Milutinović

8.5.2001

1. Dokažite, da je funkcija $f : X \longrightarrow Y$ surjektivna natanko tedaj, ko je $f(f^{-1}(B)) = B$ za poljubno podmnožico $B \subseteq Y$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo

$$f : \bigcup_{z\in\mathbf{Z}} \langle z, z+1\rangle \longrightarrow \langle 0,1\rangle \times \mathbf{Z}.$$

3. Opišite dobro urejeno množico, ki ima natanko 3 limitne elemente. Je ordinalni tip takšne dobro urejene množice enolično določen?

4. Katera množica ima več elementov: množica X vseh podmnožic množice $\mathbf{Q}$ ali množica Y vseh podmnožic množice $\mathbf{R}$?

Pripravil Uroš Milutinović

25.5.2001 (kolokvij)

1. Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}$, podana s

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x = y \vee \sin x \cdot \sin y > 0.$$

Določite faktorsko množico $\mathbf{R}/\!\sim$ in njeno moč. Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

2. Ugotovite, z razlago, ali je množica

$$\{n \in \mathbf{N} : n \mid 121\}^{\{n \in \mathbf{N} : 121 \mid n\}}$$

števna ali ne. Opomba: oznaka $a \mid b$ pomeni "a deli b".

3. Izračunajte moč množice $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq e^x + x^2 + 3x + 1\}$.

4. Naj bo $\alpha = \omega 2 + k$, kjer je k podano naravno število. Dokažite, da velja $\omega^2 2 < \alpha^2 < \omega^2 3$.

Pripravil Uroš Milutinović

12.6.2001

1. Naj bo funkcija $f : X \longrightarrow Y$ injektivna. Dokažite, da za poljubno množico A in poljubni funkciji $u, v : A \longrightarrow X$ velja:

$$f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v.$$

2. Na $\mathbf{R}$ je definirana relacija S:

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ xSy \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \geq x + 3.$$

Za vsako od naslednjih trditev ločeno ugotovite ali je resnična, ali ne: a) S je refleksivna; b) S je simetrična; c) S je antisimetrična; d) S je tranzitivna; e) S je sovisna (oz. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $xSy \vee ySx$).

3. Dokažite, da za poljubni ordinalni števili α, β velja

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + 1 < \beta + 1.$$

4. Katera množica ima več elementov: množica X vseh zaporedij v $\mathbf{Q}^{\mathbf{R}}$ ali množica Y vseh zaporedij v $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$?

Pripravil Uroš Milutinović

27.6.2001

1. Podane so poljubne funkcije $f_1 : X \longrightarrow Y$, $f_2 : X \longrightarrow Z$ in $f : X \longrightarrow Y \times Z$, povezane na naslednji način:
$$\forall x \in X,\ f(x) = (f_1(x), f_2(x))\,.$$
Dokažite:
   (a) Če je vsaj ena izmed funkcij f_1, oz. f_2 injektivna, tedaj je injektivna tudi funkcija f.
   (b) Obrat predhodne trditve ne velja.

2. Na $\mathbf{R}$ je definirana relacija $\sim$:
$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^7 + x^5 + x^3 + x = y^7 + y^5 + y^3 + y.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, in ugotovite ali je faktorska množica $\mathbf{R}/\!\sim$ števna ali ne.

3. Uredite po velikosti naslednja ordinalna števila:
$(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+1)(\omega+3)(\omega+2)$, $(\omega+2)(\omega+1)(\omega+3)$,
$(\omega+2)(\omega+3)(\omega+1)$, $(\omega+3)(\omega+1)(\omega+2)$, $(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)$.

4. Naj bo k poljubno kardinalno število in A, B poljubni množici, za kateri velja $|A\cap B| = |A\cup B| = k$. Dokažite, da velja $|A| = |B| = k$.

Pripravil Uroš Milutinović

28.8.2001

1. Dokažite: če je $g \circ f$ bijekcija, tedaj je f injekcija in g surjekcija. S primerom pokažite, da f in g nista nujno bijekciji.

2. Določite množico
$$\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left[1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]\right).$$

3. Na množici $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je definirana relacija ureditve $\preceq$:
$$\begin{aligned}(m_1, n_1) \preceq (m_2, n_2) \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad & (m_1 + n_1 < m_2 + n_2) \vee \\ & (m_1 + n_1 = m_2 + n_2 \ \&\ m_1 \leq m_2).\end{aligned}$$
Določite ordinalni tip urejene množice $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \preceq)$ (ni potrebno dokazovati, da je $\preceq$ ureditev).

4. Določite moči naslednjih množic: $\{1,2,3\}^{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{Q}^{\{1,2,3\}}$, $\mathbf{R}^{\{1,2,3\}}$.

Pripravil Uroš Milutinović

11.9.2001

1. Dokažite: funkcija $f : X \longrightarrow Y$ je injektivna natanko takrat, kadar obstaja funkcija $g : Y \longrightarrow X$, za katero velja $g \circ f = 1_X$, kjer je 1_X identiteta na X.

2. Naj bo $f : \Lambda \to M$ surjekcija in naj za poljubni $\lambda \in \Lambda$ velja $B_{f(\lambda)} = A_\lambda$. Dokažite:
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\mu\in M} B_\mu.$$

3. Na množici $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je definirana relacija $\sim$:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \overset{def}{\iff} m_1 + n_1 = m_2 + n_2.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ in da je faktorska množica $\mathbf{N} \times \mathbf{N}/\sim$ števna.

4. Naj bo $\alpha = \omega + 2$, $\beta = \omega 2 + 3$, $\gamma = \omega 3 + 1$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$.

Pripravil Uroš Milutinović

15.2.2002 (kolokvij)

1. Naj bodo A, B, C, D poljubne množice. Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \times C) \setminus (B \times C)) \setminus (A \times D)?$$

Če enakost velja, jo dokažite, v nasprotnem primeru poiščite protiprimer.

2. Naj bosta $f : X \longrightarrow Y$ in $g : Y \longrightarrow Z$ funkciji. Dokažite: če je $g \circ f$ bijekcija, tedaj je f injekcija in g surjekcija. Ali sta funkciji f in g nujno bijekciji?

3. Eksplicitno poiščite bijekcijo med $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ in $[-1, 0] \times \langle 0, 1]$.

4. Naj bo p poljubno praštevilo. Na množici vseh celih števil definiramo relacijo $\sim$ s predpisom: $\forall a, b \in \mathbf{Z},\ a \sim b \Leftrightarrow p \mid (a - b)$ (p deli $a - b$). Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{Z}$ ter določite ekvivalenčne razrede relacije $\sim$ in faktorsko množico $\mathbf{Z}/\sim$.

Pripravila Ajda Fošner

12.3.2002

1. Dokažite: funkcija $f : X \longrightarrow Y$ je surjekcija natanko takrat, kadar za vsako podmnožico B množice Y velja $f(f^{-1}(B)) = B$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : (\mathbf{R} \setminus [0, 1]) \times \mathbf{R} \longrightarrow \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

3. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$x \sim y \Leftrightarrow ((x - y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \vee (x = y)).$$

Ugotovite ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Svoj odgovor utemeljite.

4. Ali je množica vseh funkcij $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ števna? Dokažite svojo trditev.

Pripravil Uroš Milutinović

16.4.2002

1. Dokažite: funkcija $f : X \longrightarrow Y$ je surjekcija natanko takrat, kadar je potenčna množica množice Y podmnožica množice $\{f(A) : A \subseteq X\}$.

2. Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{Z} \cup [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$.

3. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, za katero velja: $x \sim y$ natanko takrat, kadar obstaja končna množica A, tako da je $x \in A$ in $y \in A$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in določite $\mathbf{R}/\sim$.

4. Naj bo $f : (X, \leq_X) \longrightarrow (Y, \leq_Y)$ izomorfizem linearno urejenih množic. Dokažite, da za poljuben element $x_0 \in X$ velja

$$x_0 = \min X \Leftrightarrow f(x_0) = \min Y.$$

Pripravil Uroš Milutinović

30.5.2002 (kolokvij)

1. Na $\mathbf{Z}$ definiramo relacijo $\preceq$ s predpisom
$$x \preceq y \Leftrightarrow (x < 0 < y) \vee (xy \geq 0 \,\&\, |x| \leq |y|).$$
Dokažite, da je $(\mathbf{Z}, \preceq)$ dobro urejena množica in izračunajte njen ordinalni tip.

2. Naj bodo $\alpha = \omega 2 + 1$, $\beta = \omega$, $\gamma = \omega + 2$. Uredite po velikosti naslednja ordinalna števila: $\alpha\beta\gamma$, $\beta\alpha\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\alpha\beta$, $\gamma\beta\alpha$.

3. Primerjajte po velikosti moči naslednjih množic (odgovor utemeljite):
   (a) Množica vseh zaporedij kompleksnih števil.
   (b) $\{f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : f \text{ je funkcija}\}$.
   (c) Množica vseh podmnožic množice lihih celih števil.

4. Na $\mathbf{R}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee \cos x \cos y > 0.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}$. Določite faktorsko množico $\mathbf{R}/\!\sim$ in njeno moč.

Pripravila Ajda Fošner

7.6.2002

1. Na množici $X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$
Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici X? (Odgovor utemeljite.) Če je, določite še moč faktorske množice $X/\!\sim$.

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [1, 2 - \frac{1}{n}] \times \langle 0, \infty\rangle$ in $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1]$.

3. Naj bo $(X, \leq)$ poljubna dobro urejena množica in $f : X \longrightarrow X$ poljubna strogo naraščajoča funkcija $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$. Dokažite, da za vsak $x \in X$ velja $x \leq f(x)$.

4. Določite moč množice $\{n \in \mathbf{Z} : 196 \text{ deli } n\}^{\{n\in\mathbf{Z} : n \text{ deli } 196\}} \times \mathbf{Z}$. Svojo trditev tudi utemeljite.

Pripravila Ajda Fošner

21.6.2002

1. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $\omega(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+2)(\omega+3)\omega$, $(\omega+3)\omega(\omega+2)$. Svoj odgovor tudi utemeljite.

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $(\mathbf{R} \setminus \langle 0, 1]) \times \langle 0, \infty\rangle$ in $\langle 1, 2\rangle \times \langle 1, 2\rangle$.

3. Naj bo $(K, \leq)$ dobro urejena množica in J njena podmnožica, za katero velja:
$$\forall \alpha \in K,\ K_\alpha \subseteq J \Rightarrow \alpha \in J.$$
Dokažite, da je $K = J$. *Opomba:* $K_\alpha = \{x \in K : x < \alpha\}$.

4. Dokažite, da je množica vseh realnih števil, ki so ničle polinomov z racionalnimi koeficienti, števna.

Pripravila Ajda Fošner

30.8.2002

1. Ali je izjava
$$((A \vee \neg B)\&((A\&B) \vee (\neg A \vee B))) \Leftrightarrow ((A\&B) \vee (\neg A\&\neg B))$$
tavtologija? Svojo trditev utemeljite.

2. Dokažite, da je funkcija $f : X \longrightarrow Y$ surjektivna natanko tedaj, ko obstaja funkcija $g : Y \longrightarrow X$, za katero velja $f \circ g = 1_Y$, kjer je 1_Y identiteta na Y.

3. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > x^2\}$ in $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > \sin x\}$.

4. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila:
$$\omega(\omega + 2)\omega, \omega^2(\omega + 2), (\omega + 2)\omega^2.$$
Svoj odgovor utemeljite.

Pripravila Ajda Fošner

12.9.2002

1. Ali je izjava
$$(\neg((A\&B) \vee (\neg A\&\neg B)) \Rightarrow (A\&B)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$
tavtologija? Svojo trditev utemeljite.

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ in $\langle -1, 0\rangle$.

3. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila:
$$\omega(\omega + 1),\ (\omega + 1)\omega,\ (\omega + 1)(\omega + 2),\ (\omega + 2)(\omega + 1),\ \omega(\omega + 2),\ (\omega + 2)\omega.$$
Svoj odgovor utemeljite.

4. Ali je množica $(\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N}\}, \leq)$ dobro urejena? Svojo trditev utemeljite. (Ureditev $\leq$ je podedovana iz množice realnih števil.)

Pripravila Ajda Fošner

16.12.2002

1. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y - x > 2\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < 0\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

2. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $\omega(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+2)\omega(\omega+3)$, $(\omega+2)(\omega+3)\omega$, $(\omega + 1)(\omega + 2)(\omega + 3)$, $(\omega + 2)(\omega + 1)(\omega + 3)$, $(\omega + 2)(\omega + 3)(\omega + 1)$. Svoj odgovor utemeljite.

3. Naj bo $A = \{f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Z} : f \text{ je funkcija}\}$ in B potenčna množica množice $\{3n + 1 : n \in \mathbf{N}\}$. Primerjajte po velikosti moči množic A in B. Odgovor utemeljite.

4. Na $\mathbf{Q}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$p \sim q \Leftrightarrow p = q \vee \operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q > 0.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{Q}$ in določite faktorsko množico $\mathbf{Q}/\sim$.

Pripravila Ajda Fošner

23.1.2003

1. Ali je izjava
$$((\neg(A \vee B) \,\&\, C) \Rightarrow (\neg C \vee B)) \Leftrightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$$
tavtologija? Svojo trditev utemeljite.

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\{4n-1 : n \in \mathbf{Z}\} \times \mathbf{R}$ in $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \langle 1, 2 - \frac{1}{n+1} \rangle \times \mathbf{N}$.

3. Naj bo A množica vseh polinomov druge stopnje s koeficienti iz $\mathbf{Q}$, $B = \mathcal{P}(\{\frac{1}{3n+2} : n \in \mathbf{N}\})$ in $C = \{f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q} : f \text{ je funkcija}\}$. Primerjajte med seboj moči množic A, B in C. Svoj odgovor utemeljite.

4. Naj bo $M_n(\mathbf{R})$ množica vseh $n \times n$ matrik nad $\mathbf{R}$. Na $M_n(\mathbf{R})$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$A \sim B \Leftrightarrow \det A - \det B = 0,$$
kjer sta $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $M_n(\mathbf{R})$? Svoj odgovor utemeljite.

Pripravila Ajda Fošner

6.2.2003

1. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq |x|\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq -|x|\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

2. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila:
$\omega^2(\omega+1)^2$, $\omega(\omega+1)\omega(\omega+1)$, $(\omega+1)^2\omega^2$, $(\omega+1)\omega(\omega+1)\omega$, $(\omega+1)\omega^2(\omega+1)$, $\omega(\omega+1)^2\omega$.
Svoj odgovor utemeljite.

3. Na $\mathbf{Z}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$a \sim b \Leftrightarrow 5 \text{ deli } a - b.$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{Z}$, določite faktorsko množico $\mathbf{Z}/\!\sim$ in njeno moč.

4. Naj bo A potenčna množica množice $\{5n+2 : n \in \mathbf{Z}\}$. Določite moč množice vseh zaporedij elementov iz A. Svoj odgovor utemeljite.

Pripravila Ajda Fošner

27.2.2003 (kolokvij)

1. Ali je izjava
$$(\neg(\neg(A \vee B) \& C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C))$$
tavtologija? Svojo trditev utemeljite.

2. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \operatorname{arc\,tg} x\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ surjektivna funkcija in $g_1, g_2 : Y \longrightarrow X$ taki funkciji, da je $g_1 \circ f = id_X$ in $g_2 \circ f = id_X$, kjer id_X označuje identiteto na množici X. Dokažite, da je $g_1 = g_2$.

4. Na množici $M = \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : f \text{ je funkcija}\}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{R}, f_1(x) = f_2(x).$$
Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici M? Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

14.4.2003

1. Ali je enakost
$$(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \times C) \setminus (A \times D)) \setminus (B \times C)$$
resnična za poljubne množice A, B, C in D? Odgovor utemeljite.

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq x^3\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x^2\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte:
$$\begin{aligned} A = & \quad \{f : \mathbf{N} \longrightarrow \{0, 1, 2\} : f \text{ je funkcija}\}, \\ B = & \quad \{f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q} : f \text{ je funkcija}\}, \\ C = & \quad \{m \in \mathbf{Z} : 7 \text{ deli } m\}. \end{aligned}$$

4. Naj bo $M_4(\mathbf{R})$ množica vseh 4×4 matrik z realnimi koeficienti. S $\operatorname{sl} A$ označimo vsoto vseh diagonalnih koeficientov matrike $A \in M_4(\mathbf{R})$. Na $M_4(\mathbf{R})$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{sl} A = \operatorname{sl} B.$$
Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $M_4(\mathbf{R})$? Odgovor utemeljite.

Pripravila Ajda Fošner

5.6.2003 (kolokvij)

1. Naj bo
$$M = \left\{ \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{bmatrix} : n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N} \right\}.$$
Na množici M definiramo relacijo $\leq$ s predpisom
$$\begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (n_1 < m_1) \vee (n_1 = m_1 \;\&\; n_2 < m_2) \vee \\ (n_1 = m_1 \;\&\; n_2 = m_2 \;\&\; n_3 < m_3) \vee \\ (n_1 = m_1 \;\&\; n_2 = m_2 \;\&\; n_3 = m_3 \;\&\; n_4 \leq m_4). \end{array}$$
Ali je množica M s tako definirano relacijo $\leq$ dobro urejena? Odgovor utemeljite.

2. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila:
$\omega(\omega+3)\omega 3$, $\omega 3(\omega+3)\omega$, $\omega^2 3(\omega+3)$, $(\omega+3)\omega^2 3$, $3\omega(\omega+3)\omega$.

3. Naj bo X neskončna števna množica in $x_0 \in X$. Določite moč množice vseh podmnožic množice X, ki ne vsebujejo elementa x_0, in jo primerjajte z močjo vseh zaporedij elementov iz X.

4. Na $\mathbf{R}^2$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 y_1 x_2 y_2 > 0) \vee (x_1 y_1 = 0 \;\&\; x_2 y_2 = 0).$$
Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}^2$. Določite vse ekvivalenčne razrede relacije $\sim$ ter faktorsko množico $\mathbf{R}^2/\sim$ in njeno moč.

Pripravila Ajda Fošner

12.6.2003

1. Naj bo $X_n = \{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{n+1} < \cos x < \frac{1}{n+1}\}$. Določite $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$ in $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} X_n$.

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > |x| + 2\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < \sin x\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Naj bo
$$A = \left\{ \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} : n_1, n_2 \in \mathbf{Z},\, m_1, m_2 \in \mathbf{Q} \right\}.$$
Določite moč množice A in njene potenčne množice. Odgovor utemeljite.

4. Naj bo X neprazna množica in $x_0 \in X$. Na potenčni množici $\mathcal{P}(X)$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$A \sim B \Leftrightarrow (x_0 \in A \;\&\; x_0 \in B) \vee (x_0 \notin A \;\&\; x_0 \notin B)\,.$$
Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathcal{P}(X)$? Če je, določite faktorsko množico $\mathcal{P}(X)/\!\sim$ in njeno moč. Odgovor utemeljite.

Pripravila Ajda Fošner

26.6.2003

1. Na $\mathbf{R}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z},\, y = x + n\pi.$$
Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}$? Odgovor utemeljite.

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\{5n + 1 : n \in \mathbf{Z}\} \times \langle 1, 2\rangle$ in $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \mathbf{N}$.

3. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte:
$$\begin{aligned} A = &\ \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : \forall i \in \mathbf{N},\, a_i \in \{0, 1\}\}\,, \\ B = &\ \{f : \mathbf{Z} \longrightarrow \{\tfrac{n}{2} + 1 : n \in \mathbf{N}\}\}\,, \\ C = &\ \mathcal{P}(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z})\,. \end{aligned}$$

4. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $\omega^2(\omega + 2)\omega$, $\omega(\omega + 2)\omega^2$, $\omega(\omega + 2)^2\omega$, $\omega(\omega + 2)\omega(\omega + 2)$, $\omega^3(\omega + 2)$, $(\omega + 2)\omega^3$.

Pripravila Ajda Fošner

21.8.2003

1. Ali je izjava
$$(((A \;\&\; B) \vee C) \Rightarrow \neg(A \;\&\; B)) \Leftrightarrow ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) \vee (\neg C \vee A))$$
tavtologija? Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\langle 0, 1\rangle \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ in $\langle 1, \infty\rangle \setminus \mathbf{N}$.

3. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila:
$$(\omega 2 + 1)\omega^2,\ \omega(\omega 2 + 1)\omega,\ \omega^2(\omega 2 + 1),\ \omega^3 2,\ 2\omega^3.$$

4. Naj bo $A = \{3n+1 : n \in \mathbf{Z}\}$ in $B = \{f : \mathbf{N} \to A\}$. Določite moč potenčne množice množice B. Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

4.9.2003

1. Ali je $(\{\frac{5n-1}{5n} : n \in \mathbf{N}\}, \leq)$ dobro urejena množica? Svojo trditev utemeljite! (Ureditev $\leq$ je podedovana iz množice realnih števil.)

2. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{0\}$ in $B = [-1,0\rangle \times [-1,0\rangle$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} [0, \pi - \tfrac{n+1}{n+2}\rangle,$$

$$B = \{(n_1, n_2, \ldots) : \forall i \in \mathbf{N},\ n_i \in \mathbf{N} \ \&\ 2 \text{ deli } n_i\},$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbf{Z} \right\}.$$

4. Naj bo X neprazna množica. Dokažite, da je X unija vseh svojih končnih podmnožic.

Pripravila Ajda Fošner

18.9.2003

1. Ali je izjava

$$(((A \vee B) \& \neg C) \Leftrightarrow (C \vee \neg B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$$

tavtologija? Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\{6n+1 : n \in \mathbf{N}\}$ in $\{\pi m + 6 : m \in \mathbf{Z} \setminus \{0,-1,1\}\}$.

3. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila:

$$\omega(\omega+1)\omega, \omega(\omega+1)(\omega+2), (\omega+2)\omega^2, (\omega+1)^2(\omega+2), (\omega+2)^2(\omega+1).$$

4. Naj bo A množica vseh celoštevilskih večkratnikov števila 10, B množica vseh zaporedij elemenov iz množice A in C potenčna množica množice B. Določite moči množic A, B in C. Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

5.2.2004

1. Naj bodo A, B, C, D poljubne množice. Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \times C) \setminus (B \times D)) \setminus (B \times C)\ ?$$

Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 2\}$ in $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < x^3 + 2\}$.

3. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $(\omega 3+3)\omega(\omega+1)$, $(\omega 3+3)(\omega+1)\omega$, $\omega(\omega 3+3)(\omega+1)$, $\omega(\omega+1)(\omega 3+3)$, $(\omega+1)\omega(\omega 3+3)$, $(\omega+1)(\omega 3+3)\omega$.

4. Naj bo A množica vseh 5×5 matrik, ki imajo po diagonali same enice, izven diagonale pa 0 ali 1. Določite moč množice vseh zaporedij elementov iz množice A. Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

19.2.2004

1. Ali je izjava

$$(\neg(\neg(A \,\&\, B) \vee C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \vee C))) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C))$$

tavtologija? Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\langle 1, -1\rangle \times \mathbf{Z}$ in $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\} \times (\mathbf{R} \setminus \{0, 1, -1\})$.

3. Naj bo $A = \{f : \mathbf{N} \longrightarrow \{0, 1, 2\} : f(1) = 1\}$, $B = \{f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z} : f(2n) = 1,\ n \in \mathbf{N}\}$ in C množica vseh zaporedij celoštevilskih večkratnikov števila 3. Določite moči množic A, B in C in jih med seboj primerjajte.

4. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A}$ množica vseh podmnožic množice X, katerih moč je 1 ali 2. Dokažite, da je
$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\,.$$

Pripravila Ajda Fošner

19.2.2004 (kolokvij)

1. Naj bodo A, B in C poljubne neprazne množice ter D podmnožica množice C. Ali velja enakost

$$(A \times C) \setminus (B \times D) = ((A \setminus B) \times C) \cup ((A \cap B) \times (C \setminus D))\,?$$

Odgovor utemeljite!

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \sin x\} \times \{\pi n + 1 : n \in \mathbf{N}\}$ in $B = \mathbf{Z} \times \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq \cos x\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Naj bo $f : A \longrightarrow B$ funkcija. Pokažite, da je f injektivna funkcija natanko tedaj, ko je $f^{-1}(f(C)) = C$ za vsako podmnožico C množice A.

4. Ali je izjava

$$(\neg(\neg(A \,\&\, B) \vee C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \vee C))) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C))$$

tavtologija? Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

8.4.2004

1. Ali je izjava

$$(\neg((A \vee B) \Leftrightarrow C) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C))) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \vee C))$$

tavtologija? Odgovor utemeljite!

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R} : x < -2\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R} : y > x^4\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $(\omega^2+1)\omega$, $\omega(\omega^2+1)$, $\omega(\omega+1)\omega$, $(\omega+1)\omega^2$, $\omega^2(\omega+1)$.

4. Naj bo X neskončna števna množica ter $x, y \in X$, $x \neq y$. Naj bo $A = \{f : \mathbf{Z} \longrightarrow X \setminus \{x, y\}\}$ in B množica vseh podmnožic množice X, ki ne vsebujejo elementa x. Določite moči množic A in B ter ju med seboj primerjajte.

Pripravila Ajda Fošner

3.6.2004 (kolokvij)

1. Naj bo $A = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : \forall i \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{R}\}$. Na množici A definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots) \Leftrightarrow$$

$$\exists n \in \mathbf{N}, a_1 = b_1 \,\&\, a_2 = b_2 \,\&\, \ldots \,\&\, a_n = b_n.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici A. Faktorsko množico $A/\!\sim$ zapišite kot družino odvisno od enega realnega parametra in določite njeno moč.

2. Naj bo $m \in \mathbf{N}$. naravno število. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $(\omega+m)^2\omega$, $(\omega+m)\omega(\omega+m)$, $\omega(\omega+m)^2$, $\omega^2(\omega+m)$, $\omega(\omega+m)\omega$, $(\omega+m)\omega^2$.

3. Naj bo X neskončna števna množica in $Y = \{\pi n + 5 : n \in \mathbf{N}\}$. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte:
   (a) $A = \{f : Y \longrightarrow X\}$,
   (b) $B = X \times Y$,
   (c) $C = \{(c_1, c_2, c_3, \ldots) : \forall i \in \mathbf{N}, c_i \in X\}$,
   (d) $D = \{f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{P}(Y)\}$, kjer je $\mathcal{P}(Y)$ potenčna množica množice Y.

4. Naj bo x_0 neko pozitivno realno število in

$$A = \left\{ \frac{x_0 n - 1}{x_0 n} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Ali je $(A, \leq)$ dobro urejena množica, če je ureditev $\leq$ podedovana iz množice realnih števil? Svojo trditev utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

10.6.2004

1. Na $\mathbf{R}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \sim y \Leftrightarrow \exists q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}, x = y^q$. Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}$? Odgovor utemeljite.

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $(\mathbf{N} \setminus \{5n : n \in \mathbf{N}\}) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ in $(\langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle) \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$.

3. Naj bo $A = \{f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N}\}$, B množica vseh zaporedij iracionalnih števil in C množica vseh podmnožic množice $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Določite moči množic A, B in C ter jih med seboj primerjajte.

4. Naj bosta $f : A \longrightarrow B$ in $g : B \longrightarrow C$ funkciji ter C_0 podmnožica množice C. Pokažite, da je

$$(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0)).$$

Pripravila Ajda Fošner

24.6.2004

1. Naj bo A množica vseh zaporedij celih števil. Na množici A definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}, a_n = b_n,$$

kjer so $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ cela števila. Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici A? Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \langle m, m+1 \rangle$ in $\langle -1, 0 \rangle \times \mathbf{N}$.

3. Naj bo X množica vseh premic v ravnini. Določite moči množice X, $\mathcal{P}(X)$ in množice vseh zaporedij elementov iz množice X ter jih med seboj primerjajte.

4. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $\omega^2(4\omega+2)$, $\omega(4\omega+2)\omega$, $(4\omega+2)\omega^2$, $\omega(\omega+1)(4\omega+2)$, $\omega(4\omega+2)(\omega+1)$, $(4\omega+2)\omega(\omega+1)$.

Pripravila Ajda Fošner

19.8.2004

1. Naj bo $f: X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija ter A in B poljubni podmnožici množice X. Pokažite, da velja $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Ali velja $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$? Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

3. Naj bo $n \in \mathbf{N}$. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $(\omega+2n)\omega$, $\omega(\omega+2n)$, $(\omega 2+n)\omega$, $\omega(\omega 2+n)$, $(\omega+n)\omega$, $\omega(\omega+n)$.

4. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Določite moč množice A, moč potenčne množice množice A in moč množice $\{f : A \longrightarrow \mathbf{N}\}$ ter jih med seboj primerjajte.

Pripravila Ajda Fošner

9.9.2004

1. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le y \le 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2 \le y \le x^2\}$.

2. Za vsako naravno število n naj bo

$$A_n = \{x \in \mathbf{R}^2 : -\frac{1}{n} \le 2 \sin x + 1 \le 1 + \frac{1}{n}\}.$$

Določite $\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ in $\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

3. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte: $A = \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

4. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $(\omega^2+1)\omega$, $\omega(\omega^2+1)$, $(\omega+1)^2\omega$, $\omega(\omega+1)^2$, $(\omega+1)\omega(\omega+1)$, $\omega(\omega+1)\omega$.

Pripravila Ajda Fošner

16.9.2004

1. Naj bo $A = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : \forall i \in \mathbf{N},\ a_i \in \mathbf{C}\}$. Na množici A definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots) \Leftrightarrow$$

$$\exists n \in \mathbf{N},\ a_n = b_n \,\&\, a_{n+1} = b_{n+1} \,\&\, a_{n+2} = b_{n+2} \ \ldots$$

Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici A? Odgovor utemeljite!

2. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$.

3. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. Določite moč množice A, moč potenčne množice množice A in moč množice vseh zaporedij elementov iz A ter jih med seboj primerjajte.

4. Ali je izjava

$$(((A \,\&\, B) \vee C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)) \vee (((A \vee B) \,\&\, C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B))$$

tavtologija? Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

21.1.2005 (kolokvij)

1. Naj bodo A, B, C in D poljubne neprazne množice. Ali velja enakost

$$((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \times ((C \setminus D) \cup (D \setminus C)) =$$

$$((A \times C) \setminus (B \times D)) \cup ((B \times D) \setminus (A \times C))\ ?$$

Odgovor utemeljite!

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq x^2\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Naj bosta $f : A \longrightarrow B$ in $g : B \longrightarrow C$ funkciji ter D podmnožica množice C. Pokažite, da je

$$(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))\,.$$

4. Dokažite, da je vsaka množica enaka uniji vseh svojih podmnožic.

Pripravila Ajda Fošner

27.1.2005

1. Naj bo $f : A \longrightarrow B$ funkcija. Ali za poljubni množici $A_0, A_1 \subseteq A$ velja

$$f(A_0 \setminus A_1) \supseteq f(A_0) \setminus f(A_1)\,?$$

Odgovor utemeljite!

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \sin x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y - 1 \leq \sin x\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Na $\mathbf{R}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow \cos x = \cos y = 0 \vee \cos x \cos y > 0\,.$$

Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}$ in določite moč faktorske množice $\mathbf{R}/{\sim}$.

4. Dokažite, da za poljubni ordinalni števili α in β velja

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + 2 < \beta + 2 .$$

Pripravila Ajda Fošner

10.2.2005

1. Ali je izjava

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \,\&\, B) \vee C)) \vee ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee B) \,\&\, C))$$

tavtologija? Odgovor utemeljite!

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Naj bo $A = \{f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}\}$. Določite moč množice A, moč množice vseh zaporedij elementov iz A ter moč množice $\{f : \mathbf{Z} \longrightarrow A\}$ in jih med seboj primerjajte.

4. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $(\omega 5+5)\omega^2$, $\omega(\omega 5+5)\omega$, $(\omega 5+5)^2\omega$, $\omega(\omega 5+5)^2$, $\omega 5(\omega 5 + 5)^2$, $(\omega 5 + 5)^2\omega 5$.

Pripravila Ajda Fošner

14.4.2005

1. Naj bo $A = \{f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]\}$. Na množici A definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$\forall f, g \in A,\ f \sim g \Leftrightarrow |f(0) - g(0)| \leq \frac{1}{2} .$$

Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici A? Odgovor utemeljite!

2. Podani sta množici $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\} \times \mathbf{Z}$ in $B = \{m \in \mathbf{N} : 3 \text{ deli } m\} \times \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med A in B.

3. Naj bo $A = \{f : [-1, 1] \longrightarrow \{-1, 1\}\}$, $B = (\mathbf{N} \setminus \{1\}) \times \{3k + 1 : k \in \mathbf{N}\}$ in C množica vseh zaporedij celoštevilskih večkratnikov števila tri. Določite moči množic A, B in C ter jih med seboj primerjajte.

4. Ali za poljubna kardinalna števila a, b in c iz $a \leq b$ sledi $ac \leq bc$? Odgovor utemeljite!

Pripravila Ajda Fošner

7.6.2005 (kolokvij)

1. Naj bo $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \{0, 1, -1\} \right\}$. Na množici X definiramo relacijo $\sim$ s predpisom:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (a_1 = a_2) \vee (a_1 = -a_2) .$$

Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici X. Določite moč ekvivalenčnega razreda matrike $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in moč faktorske množice $X/\sim$.

2. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $\omega^3(\omega+2)(\omega+3)$, $(\omega+2)\omega^3(\omega+3)$, $(\omega+2)(\omega+3)\omega^3$, $\omega^2(\omega+3)(\omega+2)\omega$, $\omega(\omega+3)(\omega+2)\omega^2$, $\omega(\omega+3)\omega(\omega+2)\omega$.

3. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte:

   (a) $A = \{f : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}\}$,
   (b) $B = \mathbf{N} \times \{5n+1 \,\mathbf{:}\, n \in \mathbf{N}\}$,
   (c) $C = \{(5c_1, 5c_2, 5c_3, \ldots) \,\mathbf{:}\, \forall i \in \mathbf{N}, c_i \in \mathbf{N}\}$.

4. Naj bo $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strogo naraščajoča funkcija. Pokažite, da je $A = \{n \in \mathbf{N} \,\mathbf{:}\, f(n) < n\}$ prazna množica. *Namig:* $\mathbf{N}$ je dobro urejena množica in $A \subseteq \mathbf{N}$.

Pripravila Ajda Fošner

9.6.2005

1. Naj bo $X = \mathcal{P}(\mathbf{C})$ potenčna množica množice vseh kompleksnih števil. Na množici X definiramo relacijo $\sim$ s predpisom:

$$\forall A, B \in X,\ A \sim B \Leftrightarrow (i \in A \,\&\, i \in B) \vee (i \notin A \,\&\, i \notin B).$$

   Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici X in določite moč faktorske množice $X/\!\sim$.

2. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\mathbf{:}\, 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 0\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\mathbf{:}\, -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Določite moči naslednjih množic in jih med seboj primerjajte:

   (a) $A = \{(7a_1, 7a_2, 7a_3, \ldots) \,\mathbf{:}\, \forall i \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{N}\}$,
   (b) $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [0, e - \frac{1}{n+5}\rangle$,
   (c) $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{bmatrix} \,\mathbf{:}\, a, b \in \mathbf{Z} \right\}$.

4. Po velikosti primerjajte naslednja ordinalna števila: $\omega^4(\omega+4)$, $\omega^3(\omega+4)\omega$, $\omega^2(\omega+4)\omega^2$, $(\omega+4)\omega^4$, $\omega(\omega+4)\omega^3$.

Pripravila Ajda Fošner

23.6.2005

1. Naj bo $X = M_n(\mathbf{C})$ množica $n \times n$ matrik s kompleksnimi koeficienti. Na množici X definiramo relacijo $\sim$ s predpisom:

$$\forall A, B \in X, A \sim B \Leftrightarrow (\det(A) = \det(B) = 0) \vee (\det(A) \neq 0 \,\&\, \det(B) \neq 0)\,.$$

   Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici X in določite moč faktorske množice $X/\!\sim$.

2. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\mathbf{:}\, y > \sin x\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\mathbf{:}\, y > e^x\}$. Eksplicitno opišite bijekcijo med množicama A in B.

3. Naj bo $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\mathbf{:}\, a, b, c, d \in \mathbf{N} \right\}$. Določite moč množice A, moč množice vseh zaporedij elementov iz A ter moč potenčne množice množice A in jih med seboj primerjajte.

4. Naj bo $n \in \mathbf{N}$. Pokažite, da za poljubno ordinalno število α velja $\alpha \leq \alpha n$.

Pripravila Ajda Fošner