Naloge za predmet *Teorija množic*

9. skupina nalog: ordinalni tipi in ordinalna števila

1. del — izomorfizmi, ordinalni tipi

1. Pokažite, da je funkcija $f : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, izomorfizem urejenih množic (in domeno in kodomeno uredimo na standarden način). Bijektivnost funkcije f ugotovite s preverjanjem tega, da je funkcija $g : \mathbf{R} \longrightarrow \langle -1, 1\rangle$, $g(y) = \dfrac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$, in levi in desni inverz za funkcijo f.
2. Dokažite, da je množica vseh začetnih intervalov linearno urejene množice A, urejena z inkluzijo, izomorfna A.
3. Dokažite, da je vsaka števna linearno urejena množica izomorfna neki podmnožici urejene množice $\mathbf{Q}$ vseh racionalnih števil.
4. Dokažite, da je ordinalni tip poljubnega odprtega intervala realnih števil enak λ.
5. Poiščite primer ordinalnih tipov α, β takih, da je $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$.
6. Poiščite primer ordinalnih tipov α, β takih, da je $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.
7. Dokažite:
   (a) $1 + \omega = \omega$, $\omega + 1 \neq \omega$;
   (b) $\omega^* + \omega = \pi$;
   (c) $\eta + \eta = \eta$;
   (d) $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$;
   (e) $\lambda + \lambda \neq \lambda$.
8. Dokažite, da za poljubne ordinalne tipe α, β, γ velja:
   (a) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
   (b) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;
   (c) $\eta \cdot \eta = \eta$;
   (d) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$;
   (e) Poiščite primer ordinalnih tipov α, β, γ, za katere velja $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.
9. Dokažite, da neskončna linearno urejena množica ima ordinalni tip ω natanko takrat, kadar so vsi njeni začetni intervali končni.
10. Imata množici $\{1, 2\} \times \mathbf{N}$ in $\mathbf{N} \times \{1, 2\}$ opremljeni z leksikografsko ureditvijo enak ordinalni tip?

2. del — ordinalna števila

1. Dokažite, da za poljubna ordinalna števila α, β, γ velja:
   (a) $\alpha \leq \alpha + \gamma$, $\alpha \leq \gamma + \alpha$;
   (b) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$;
   (c) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
   (d) $\gamma + \alpha = \gamma + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$;
   (e) $\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta$.

2. Poiščite primer ordinalnih števil α, β, γ, za katere velja $\alpha \neq \beta$ in $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

3. Dokažite, da za poljubni ordinalni števili α, β velja

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + 1 \leq \beta.$$

4. Dokažite, da se vsako ordinalno število lahko zapiše v obliki $\alpha + n$, pri čem je α limitno ordinalno število ali 0, n pa naravno število ali 0.

5. Vse naloge iz prejšnjega dela o ordinalnih tipih, za katere je to smiselno, rešite v razredu ordinalnih števil.

6. Dokažite, da za poljubna ordinalna števila α, β, γ velja
   $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma$.

7. Dokažite, da za poljubno ordinalno število α, ki ni enako 0, velja neenakost $\alpha < \alpha \cdot 2$.

8. α velja $\alpha \leq \alpha^2$. Določite, v katerih primerih velja enakost in v katerih stroga neenakost.

9. Določite vsa ordinalna števila α, za katera velja $\alpha^2 = \alpha$. (Dokažite, da dobljena števila res zadoščajo pogoju in da druga ne zadoščajo!)

10. Primerjajte ordinalni števili $\omega(\omega + 1)(\omega + 2)$ in $(\omega + 2)(\omega + 1)\omega$.

11. Naj bo $\alpha = \omega + 1$, $\beta = \omega 2$. Uredite po velikosti ordinalna števila
    ω, ω^2, $\omega\alpha$, $\alpha\omega$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$. Podajte razlago.

12. Za ordinalni števili $\alpha = (\omega + 1)^2$ in $\beta = 2\omega$ uredite po velikosti ordinalna števila:

$$\alpha, \beta, \omega, \omega^2, \omega(\omega + 1)(\omega + 2), \alpha + \beta, \beta + \alpha.$$

13. Naj bo $\alpha = \omega + 1$, $\beta = \omega$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$, $\beta\alpha\alpha$, $\beta\beta\alpha$, $\beta\alpha\beta$, $\alpha\beta\beta$.

14. Dokažite, da za poljubni ordinalni števili α, β velja

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \omega \leq \beta + \omega.$$

Poiščite protiprimer za trditev

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \omega < \beta + \omega.$$

15. Naj bo $\alpha = \omega^2$, $\beta = \omega^2 + 1$ in $\gamma = \omega^2 + \omega$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\alpha\beta$, $\beta\alpha\gamma$, $\beta\gamma\alpha$ in $\gamma\beta\alpha$ ter podajte razlago za svoj odgovor.

16. Naj bosta $\alpha = \omega 2 + 3$, $\beta = \omega 3 + 2$. Uredite po velikosti ordinalna števila $\alpha\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta$, $\beta\alpha\alpha$, $\beta\beta\alpha$, $\beta\alpha\beta$, $\alpha\beta\beta$.

17. Naj bo $\alpha = \omega$, $\beta = \omega 2$, $\gamma = \omega 3$. Dokažite, da za vsako naravno tevilo n velja

$$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n.$$

18. Z matematično indukcijo po n dokažite, da za poljubni naravni števili m, n velja $(\omega m)^n = \omega^n m$.

19. Z matematično indukcijo po n dokažite, da za poljubni naravni števili m, n velja $(\omega + m)n = \omega n + m$.

20. (a) Eksplicitno opišite eno bijekcijo $f : \mathbf{N} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{N}$.

    (b) Opišite linearno ureditev $\preceq$ na množici $\mathbf{N} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$, tako da bo ordinalni tip urejene množice $(\mathbf{N} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N}), \preceq)$ enak ω.