Naloge za predmet *Teorija množic*

1. skupina nalog: osnovno o matematični logiki in množicah

Opomba: za nas bo $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, čeprav je za večino logikov $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. Preberite naglas (po možnosti na več načinov):

   (a) $\{1, 2, 3\}$

   (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

   (d) $\{x \in \mathbf{N} \colon 1 \leq x \leq 6\}$

   (e) $\{x \in \mathbf{N} \colon x < 7\}$

   (f) $\{x \in \mathbf{R} \colon 3 < x < 7\}$

   (g) $\{x \in \mathbf{R} \colon x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$

   (h) $\{x \in \mathbf{C} \colon x^{17} + 5x - 2 = 0\}$

   (i) $\{(x, y) \colon x \in \mathbf{R} \,\&\, y \in \mathbf{R} \,\&\, x^2 + 5x - 2y^2 - y - 3 = 0\}$

   (j) $\{(x, y) \colon x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ x^2 + y^2 = 1\}$

   (k) $\{(x, y) \colon x, y \in \mathbf{R},\ y = e^x\}$

   (l) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon \sin x + \cos y - 1 = 0\}$

   (m) $\{x \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \colon \{1, 2\} \subseteq x \subseteq \{1, 2, 3, 4\}\}$

   (n) $\{x \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \colon \{1, 2\} \supseteq x\}$

   (o) $\{x \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \colon \{1, 2\} \subseteq x\}$

   (p) $\{x \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \colon \{1, 2\} \supseteq x\}$

   (q) $\{x \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \colon \{1, 2\} \subseteq x\}$

2. Primerjajte med sabo naslednje množice; ugotovite število njihovih elementov:

   (a) $\emptyset$

   (b) $\{\emptyset\}$

   (c) $\emptyset \cup \{\emptyset\}$

   (d) $\{x \in \mathbf{R} \colon x^2 + 1 = 0\}$

   (e) $\{\emptyset, \emptyset\}$

   (f) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (g) $\{x \in \mathbf{R} \colon x^2 + 5x + 6 = 0\}$

   (h) $\{x \in \mathbf{R} \colon x^2 + 5x - 2 = 0\}$

   (i) $\{x \in \mathbf{Q} \colon x^2 + 5x - 2 = 0\}$

   (j) $\{\{\{\emptyset\}\}\}$

   (k) $\mathcal{P}(\emptyset)$

(l) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

(m) $\mathcal{P}(\{\{\{\emptyset\}\}\})$

(n) $\mathcal{P}(\{x \in \mathbf{R} \colon x^2 + 5x + 6 = 0\})$

3. Preberite naglas:

   (a) $\neg(\neg a) \Leftrightarrow a$

   (b) $a \vee a \Leftrightarrow a, \ \ a \,\&\, a \Leftrightarrow a$

   (c) $(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c), \quad (a \,\&\, b) \,\&\, c \Leftrightarrow a \,\&\, (b \,\&\, c)$

   (d) $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a, \quad a \,\&\, b \Leftrightarrow b \,\&\, a$

   (e) $a \vee (b \,\&\, c) \Leftrightarrow (a \vee b) \,\&\, (a \vee c), \quad a \,\&\, (b \vee c) \Leftrightarrow (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c)$

   (f) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a) \,\&\, (\neg b), \ \ \neg(a \,\&\, b) \Leftrightarrow (\neg a) \vee (\neg b)$

   (g) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$

   (h) $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \,\&\, \neg b)$

   (i) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \,\&\, (b \Rightarrow a))$

4. Preberite naglas (po možnosti na več načinov):

   (a) $\forall x, x + 0 = x$

   (b) $\forall x \in \mathbf{R}, x + 0 = x$

   (c) $\forall x, \exists y, x + y = 0$

   (d) $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Z}, x + y = 0$

   (e) $\forall x, \forall y, \forall z, x + (y + z) = (x + y) + z$

   (f) $\forall x \in \mathbf{C}, \forall y \in \mathbf{C}, \forall z \in \mathbf{C}, x + (y + z) = (x + y) + z$

   (g) $\forall x, y, z \in \mathbf{C}, x + (y + z) = (x + y) + z$

   (h) $\forall x, \forall y, x + y = y + x,$

   (i) $\forall x \in \mathbf{C}, \forall y \in \mathbf{C}, x + y = y + x$

   (j) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x, \exists y, ny = x$

   (k) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in G, \exists y, ny = x$

   (l) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x, x \neq 0 \Rightarrow nx \neq 0$

   (m) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in G, x \neq 0 \Rightarrow nx \neq 0$

   (n) $\forall x, \exists n \in \mathbf{N}, nx = 0$

   (o) $\forall x \in G, \exists n \in \mathbf{N}, nx = 0$

   (p) $\forall x, \forall y, x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

   (q) $\forall x \in R, \forall y \in R, x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

   (r) $\forall X \subseteq \mathbf{R}, ((X \neq \emptyset) \,\&\, (\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in X, x \leq y)) \Rightarrow (\exists z \in \mathbf{R}, z = \sup X)$

5. Dokažite, da so vse trditve iz naloge 3 tavtologije.

6. Poiščite izjave A, B, C, ki bodo dokazovale, da izjava

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$$

ni tavtologija.

7. Ugotovite ali je izjava

$$((A \,\&\, B) \vee ((A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee \neg B))) \Leftrightarrow (A \vee B)$$

tavtologija.

8. (a) Napišite kontrapozicijo in obrat trditve "Če je $x < 0$, tedaj je $x^2 - x > 0$". Določite katere med temi tremi trditvami so resnične.
   (b) V kateri množici ste obravnavali prejšnjo nalogo? Kako ste razumeli (nenapisane) kvantifikatorje?
   (c) Enako v primeru trditve "Če je $x > 0$, tedaj je $x^2 - x > 0$".

9. Bodita A in B poljubni množici realnih števil. Napišite negacije naslednjih trditev:
   (a) Za vsak $a \in A$ je res, da je $a^2 \in B$.
   (b) Za vsaj en $a \in A$ je res, da je $a^2 \in B$.
   (c) Za vsak $a \in A$ je res, da $a^2 \notin B$.
   (d) Za vsaj en $a \notin A$ je res, da je $a^2 \in B$.

10. Preverite distributivnostna zakona za $\cup$ in $\cap$ ter DeMorganovi formuli.