Naloge za predmet *Teorija množic*

7. skupina nalog: poljubni produkti

1. Naj bo $\alpha : X \longrightarrow Y$ podana bijekcija. Dokažite, da je $\varphi : X^{\mathbf{R}} \longrightarrow Y^{\mathbf{R}}$, definirana s formulo $\varphi(f) = \alpha \circ f$, $f \in X^{\mathbf{R}}$, bijekcija.

2. Naj bo $\alpha : X \longrightarrow Y$ podana bijekcija. Dokažite, da je $\varphi : \mathbf{R}^Y \longrightarrow \mathbf{R}^X$, definirana s formulo $\varphi(f) = f \circ \alpha$, $f \in \mathbf{R}^Y$, bijekcija.

3. Naj bosta $\alpha : A \longrightarrow X$, $\beta : B \longrightarrow Y$ podani bijekciji. Dokažite, da je funkcija $\varphi : Y^X \longrightarrow B^A$, definirana s formulo $\varphi(f) = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$, $f \in Y^X$, bijekcija.

4. Katera izmed naslednjih podmnožic množice $\mathbf{R}^\omega$ se lahko zapiše kot produkt podmnožic od $\mathbf{R}$?

   (a) $\{x : \forall i, x_i \in \mathbf{Z}\}$.

   (b) $\{x : \forall i, x_i \geq i\}$.

   (c) $\{x : \forall i \geq 100, x_i \in \mathbf{Z}\}$.

   (d) $\{x : x_2 = x_3\}$.

5. Naj bo J neprazna množica indeksov in naj bosta $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$, $\{B_\alpha : \alpha \in J\}$ družini množic. Dokažite naslednje trditve:

   (a) Če za vse $\alpha \in J$ velja $A'_\alpha \subseteq A_\alpha$, tedaj je $\prod_{\alpha\in J} A'_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in J} A_\alpha$.[1]

   (b) Obrat prejšnje trditve velja, če je $\prod_{\alpha\in J} A'_\alpha$ neprazen.

   (c) $(\prod_{\alpha\in J} A_\alpha) \cap (\prod_{\alpha\in J} B_\alpha) = \prod_{\alpha\in J}(A_\alpha \cap B_\alpha)$.

   (d) $(\prod_{\alpha\in J} A_\alpha) \cup (\prod_{\alpha\in J} B_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha\in J}(A_\alpha \cup B_\alpha)$.

   (e) Če je vsaj ena množica A_α prazna, tedaj je produkt $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ prazen. (Kaj pa velja v primeru, kadar so vse množice A_α neprazne?)

6. Naj bo J množica indeksov; $J = K \cup L$, kjer sta K in L disjunktni neprazni množici. Poiščite bijekcijo iz
$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \quad \text{na} \quad (\prod_{\alpha\in K} A_\alpha) \times (\prod_{\alpha\in L} A_\alpha).$$

7. Naj bo $m, n \in \mathbf{N}$, $X \neq \emptyset$.

   (a) Če je $m \leq n$, poiščite injektivno preslikavo $f : X^m \to X^n$.

   (b) Poiščite bijektivno preslikavo $g : X^m \times X^n \to X^{m+n}$.

   (c) Poiščite injektivno preslikavo $h : X^n \to X^\omega$.

   (d) Poiščite bijektivno preslikavo $k : X^n \times X^\omega \to X^\omega$.

   (e) Poiščite bijektivno preslikavo $l : X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$.

   (f) Če je $A \subseteq B$, poiščite injektivno preslikavo $m : X^A \to X^B$.

[1] Formalno, če funkciji $x : J \to \cup_{\alpha\in J} A'_\alpha$ spremenimo kodomeno v $\cup_{\alpha\in J} A_\alpha$, dobimo novo, različno funkcijo. Mi bomo v tej in podobnih nalogah takšni funkciji identificirali.