Naloge za predmet *Teorija množic*

4. skupina nalog: relacije

1. Določite $\mathcal{D}_R$, $\mathcal{R}_R$, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ za naslednje relacije:

   (a) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{N} \text{ in } x \text{ deli } y\}$.

   (b) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{N} \text{ in } y \text{ deli } x\}$.

   (c) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R} \text{ in } x + y \leq 0\}$.

   (d) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R} \text{ in } 2x \geq 3y\}$.

   (e) $R = \{(x, y) : x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ in } y \geq \sin x\}$.

2. Dokažite, da za poljubne relacije velja:

   (a) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.

   (b) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

   (c) $\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$.

   (d) $Q \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$.

3. Dokažite, da za poljubne relacije velja:

   (a) $Q \circ \left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (Q \circ R_i)$.

   (b) $\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \circ Q \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ Q)$.

   (c) V nobeni izmed prejšnjih dveh trditev se znak $\subseteq$ ne more nadomestiti z znakom $=$.

4. Naj bosta R in S antisimetrični relaciji na množici A. Dokažite, da je relacija $R \cup S$ antisimetrična natanko takrat, ko je $R \cap S^{-1} \subseteq \Delta_A$, $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

5. Preberite naslednji "dokaz" trditve, da je vsaka relacija R, ki je hkrati simetrična in tranzitivna, nujno tudi refleksivna, in poiščite napako pri sklepanju: "Ker je R simetrična, iz xRy sledi yRx. Ker je R tranzitivna, iz xRy in yRx sledi xRx, to pa je željena trditev.".

6. Naj bo C binarna relacija na množici A in $A_0 \subseteq A$. *Zožitev* relacije C na množico A_0 je relacija $C \cap (A_0 \times A_0)$. Dokažite, da je zožitev ekvivalenčne relacije znova ekvivalenčna relacija.

7. Dokažite, da je relacija $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna natanko takrat, ko je refleksivna in za $\forall x, y, z \in A$ velja
$$xRy \;\&\; yRz \;\Rightarrow\; zRx.$$

8. Naj bo $f : A \longrightarrow B$ surjektivna funkcija. Na A definiramo relacijo $\sim$ s formulo: $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da med faktorsko množico (množico vseh ekvivalenčnih razredov) in množico B obstaja bijektivna preslikava.

9. Naj bosta $\sim_1$ in $\sim_2$ podani ekvivalenčni relaciji na X.

   (a) Ugotovite, ali je relacija R, definirana s formulo

   $$\forall x, y \in X,\ xRy \overset{def}{\iff} (x \sim_1 y) \vee (x \sim_2 y),$$

   ekvivalenčna relacija na X.

   (b) Ugotovite, ali je relacija S, definirana s formulo

   $$\forall x, y \in X,\ xSy \overset{def}{\iff} (x \sim_1 y) \,\&\, (x \sim_2 y),$$

   ekvivalenčna relacija na X.

10. Naj bo $\sim_1$ ekvivalenčna relacija na X in $\sim_2$ ekvivalenčna relacija na Y.

   (a) Na $X \times Y$ definiramo relacijo $\sim$ s formulo

   $$\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall y_1, y_2 \in Y,\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \overset{def}{\iff} (x_1 \sim_1 x_2) \,\&\, (y_1 \sim_2 y_2).$$

   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $X \times Y$.

   (b) Dokažite, da velja

   $$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ [(x, y)] = [x]_1 \times [y]_2,$$

   kjer je
   — $[(x, y)]$ ekvivalenčni razred elementa (x, y) glede na relacijo $\sim$,
   — $[x]_1$ ekvivalenčni razred elementa x glede na relacijo $\sim_1$,
   — $[y]_2$ ekvivalenčni razred elementa y glede na relacijo $\sim_2$.

11. Definiramo, da sta točki (x_1, y_1), (x_2, y_2) ravnine ekvivalentni, če velja $y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2$. Preverite, da je dobljena relacija zares ekvivalenčna in določite ekvivalenčne razrede.

12. Bodita S in S' naslednji podmnožici ravnine:

   $$S = \{(x, y) : y = x + 1 \,\&\, 0 < x < 2\},$$

   $$S' = \{(x, y) : y - x \in \mathbf{Z}\}.$$

   (a) Pokažite, da je S' ekvivalenčna relacija na $\mathbf{R}$ in da je $S \subseteq S'$. Določite ekvivalenčne razrede relacije S'.

   (b) Dokažite, da je presek poljubne družine ekvivalenčnih relacij na množici A ekvivalenčna relacija na množici A.

   (c) Določite ekvivalenčno relacijo T na $\mathbf{R}$, ki je presek vseh ekvivalenčnih relacij na $\mathbf{R}$, ki imajo S za podmnožico. Določite ekvivalenčne razrede relacije T.

13. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

   $$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow \sin x - \sin y \in \mathbf{Z}.$$

   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

14. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \ \Leftrightarrow\ x - y \in \mathbf{Z}.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

15. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$x \sim y \ \Leftrightarrow\ x - y \in \mathbf{Q}.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

16. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}^2$, definirana s formulo

$$\forall x, y, u, v \in \mathbf{R},\ (x, y) \sim (u, v) \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter določite $[(0,1)]$ in $[(0,0)]$. Pokažite, da obstaja bijekcija $f : \mathbf{R}^2/\!\sim \longrightarrow [0, +\infty\rangle$

17. Naj bo $\sim_1$ ekvivalenčna relacija na množici X, $\sim_2$ ekvivalenčna relacija na množici Y, ter $f : X/\!\sim_1 \longrightarrow Y/\!\sim_2$ podana bijekcija. Dokažite: če za vsak $x \in X$ velja $|[x]| = |f([x])|$, tedaj je $|X| = |Y|$.

18. Dokažite, da je zožitev linearne ureditve znova linerna ureditev. Obravnavajte tako primer stroge ureditve, kot primer nestroge ureditve.

19. Dokažite, da je leksikografska ureditev produkta dveh linearno urejenih množic linearna ureditev.

20. Podani sta linearno urejeni množici $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$. Na kartezičnem produktu $A \times B$ definiramo relacijo $\preceq$ na naslednji način:

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a_1 \leq_A a_2 \ \&\ b_1 \leq_B b_2.$$

   (a) Dokažite, da je $(A \times B, \preceq)$ delno urejena množica.

   (b) Dokažite, da $(A \times B, \preceq)$ ni linearno urejena množica, če je $|A| \geq 2$ in $|B| \geq 2$.

21. Dokažite, da element linearno urejene množice lahko ima največ enega neposrednega predhodnika in največ enega neposrednega naslednika. Dokažite, da podmnožica linearno urejene množice lahko ima največ en maksimum in največ en minimum.

22. Za točki (x_0, y_0), (x_1, y_1) ravnine definiramo:

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1) \ \Leftrightarrow\ x_0 < x_1 \ \&\ y_0 \leq y_1.$$

Pokažite, da sta krivulji $y = x^3$ in $y = 2$ maksimalni linearno urejeni podmnožici delno urejene množice $(\mathbf{R}^2, \prec)$, krivulja $y = x^2$ pa ni. Določite *vse* maksimalne linearno urejene podmnožice.

23. Za realni števili a, b definiramo: $a \prec b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b - a > 0 \ \&\ b - a \in \mathbf{Q}$. Pokažite, da je $\prec$ stroga delna ureditev na $\mathbf{R}$. Kaj so maksimalne linearno urejene podmnožice delno urejene množice $(\mathbf{R}, \prec)$?

24. Za točki ravnine definiramo $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, če velja bodisi $y_1 - x_1^2 < y_2 - x_2^2$, bodisi $y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2$ in hkrati $x_1 < x_2$. Pokažite, da je relacija $<$ stroga linearna ureditev in poiščite njeno geometrijsko interpretacijo.

25. Na $\mathbf{R}$ definiramo relacijo C na naslednji način: xCy velja natanko takrat, kadar je bodisi $x^2 < y^2$, bodisi $x^2 = y^2$ in hkrati $x < y$. Dokažite, da je C linearna ureditev na $\mathbf{R}$.

26. Naj bo $X = \mathcal{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ množica vseh nepraznih podmnožic množice $\mathbf{R}$. Na X definiramo relacijo $\preceq$ na naslednji način:

$$A \preceq B \overset{def}{\iff} \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b.$$

Ugotovite ali je relacija $\preceq$:

(a) refleksivna;

(b) antisimetrična;

(c) tranzitivna;

(d) sovisna.

27. Na množici $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ obravnavamo naslednje linearne ureditve:

(a) Leksikografsko ureditev.

(b) Ureditev $<$ definirano na naslednji način: $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ natanko takrat, kadar je bodisi $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$, bodisi $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ in hkrati $y_0 < y_1$.

(c) Ureditev $<$ definirano na naslednji način: $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ natanko takrat, kadar je bodisi $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$, bodisi $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ in hkrati $y_0 < y_1$.

Za vse tri relacije določite elemente, ki imajo neposredne predhodnike in ugotovite, ali obstaja minimum. Pokažite, da so vsi trije ordinalni tipi različni.

28. Upoštevajoč, da ima v $\mathbf{R}$ vsaka navzgor omejena neprazna množica svoj supremum, dokažite, da imata to lastnost tudi množici $[0, 1]$ in $[0, 1\rangle$. Preverite, ali to velja tudi za množice $[0, 1] \times [0, 1]$, $[0, 1] \times [0, 1\rangle$, $[0, 1\rangle \times [0, 1]$ z leksikografsko ureditvijo.

29. Dokažite naslednji izrek: če v linearno urejeni množici A ima vsaka navzgor omejena neprazna množica svoj supremum, tedaj v A ima tudi vsaka navzdol omejena neprazna množica svoj infimum.

30. Če je C relacija na A, naj bo D relacija definirana s formulo: $(b, a) \in D \Leftrightarrow (a, b) \in C$ (oz. $D = C^{-1}$).

(a) Pokažite, da je C simetrična natanko takrat, kadar je $D = C$.

(b) Pokažite, da je D linearna ureditev, če je C linearna ureditev.

(c) Dokažite obrat izreka iz naloge 29.