Osnove analize – vaje za 1. kolokvij

1. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo pogoju:

   a) $\left|\frac{1}{2}|x+2|-x\right| < \frac{1}{2}$,

   b) $|3-x|-|2x+1| < 4-2|x+2|$.

2. Računsko in grafično poišči realne rešitve neenačbe:

   $$2|x-1| > \left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

3. Dana je funkcija:

   $$f(x) = |x-|1-2x||.$$

   a) Skiciraj graf funkcije f.

   b) Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo pogoju $4f(x) < 1$.

4. Dana je funkcija:

   $$f(x) = 1-x+|x^2-1|.$$

   a) Skiciraj graf funkcije f.

   b) Reši neenačbo $f(x) > f(2x)$.

5. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n velja:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

   b) $9|(3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4)$.

   c) $7|(2^{3^n}-1)$.

   d) $(1+a)^n \geq 1+na$, $a > -1$.

   e) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

   f) $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{2^n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\sin\frac{2^{n+1}\pi}{3}}{3\cdot 2^n}$.

6. Določi definicijska območja podanih funkcij in ugotovi, ali sta kateri izmed funkcij enaki:

   $$f(x) = (x+|x|)\sqrt{x\,\sin^2(\pi x)},$$
   $$g(x) = (x+|x|)\sqrt{x}\,|\sin(\pi x)|,$$
   $$h(x) = \sqrt{(x+|x|)^2\,x\,\sin^2(\pi x)}.$$

7. Določi naravna definicijska območja naslednjih funkcij:

   a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2-3}{2(x^2+1)^{-1}-1}}$,

   b) $f(x) = \ln(\cos x) + \sqrt{8\pi + (4\pi - 2)x - x^2}$,

   c) $f(x) = \sqrt{\cos x - \sin x}$,

   d) $f(x) = \log\left(\dfrac{x}{1-\log(x^2-1)}\right)$,

   e) $f(x) = \log_{100x}\left(\dfrac{2\log x + 1}{-x}\right)$,

   f) $f(x) = \ln(\sin(2\arcsin(x-5)))$.

8. Dane so funkcije:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x), \qquad g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x), \qquad \text{in} \qquad h(x) = x.$$

   Določi definicijska območja podanih funkcij in ugotovi, ali sta kateri izmed funkcij enaki.

9. Naj bo $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$. Določi f_n, če je $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \notin \{0,1\}$.

10. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \geq 0 \\ e^{-x} & ; \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{in} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln x & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x^2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; \quad x < 0\,. \end{cases}$$

   Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

11. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi(x+2) & ; \quad x \leq -1 \\ \dfrac{\arccos x}{x} & ; \quad -1 < x < 0 \\ \sqrt{x} & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{in} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & ; \quad x \geq 0 \\ 1 & ; \quad x < 0\,. \end{cases}$$

   Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.