OSNOVE ANALIZE in MATEMATIKA - vaje za 2. kolokvij

1. Določi vsa kompleksna števila z, za katera velja:

   a) $2z^2 - 3\overline{z}^2 = 10i$.

   b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{5}$ in $\mathrm{Im}(\overline{z} + 4i) = 2$.

2. V kompleksni ravnini skiciraj vsa kompleksna števila z, za katera velja:

   a) $\mathrm{Re}(z^2) = 1$.

   b) $|3z + 2\mathrm{Re}(z+2) - \overline{z} - 4| \leq 2|z + 6i|$.

   c) $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Im}(z^2)$.

3. V kompleksni ravnini skiciraj naslednji množici točk:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}(\overline{z}^{\,3}) < 0\} \quad \text{in} \quad B = \{zi\,;\ z \in A\}.$$

4. Kompleksno število $z = \dfrac{2(\sqrt{3} - 2i)}{5 - i\sqrt{3}}$ predstavi s pomočjo polarnega zapisa in izračunaj z^{10}.

5. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe:

   a) $z^7 + z^5 + z^3 + z = 0$.

   b) $z^5 + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^{10}$.

6. Naj bo $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom: $\varphi(z) = z^4 + i\,|z^4|$. V kompleksni ravnini skiciraj množico $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \varphi(z) \in \mathbb{R}\}$.

7. Izračunaj limite:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^4 + x^2 - 12}{x^3 + x^2 - 3x - 3}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2}}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x}$

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 4}$

   f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

   h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

8. Ugotovi, ali lahko določimo $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \neq 0 \\ a & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 0$, če je:

a) $f(x) = \dfrac{e^{x+1} - e}{x}$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sin(x^2)}}{x}$.

9. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(1-x)}{1-\sqrt{2-x}} & ; \quad x < 1 \\ b & ; \quad x = 1 \\ \dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x > 1 \end{cases}.$$

Določi števili $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna v točki $x = 1$.

10. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x+1}} & ; \quad x < -1 \\ \ln(a-x)^b & ; \quad -1 \leq x < 0 \\ \sin x & ; \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Določi števili $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna.

11. Izračunaj limite:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^4 + \sqrt{x}}{(1+x^2)^2} \right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \right)^{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x-2}{2x+1} \right)^{\frac{x}{2}}$.

Rešitve:

1. a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$.
   b) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 + 2i$.

2. a) Hiperbola z enačbo $x^2 - y^2 = 1$.
   b) Krog s središčem v točki $2i$ in polmerom 4.
   c) Premici z enačbama $y(1 + \sqrt{2}) = x$ in $y(1 - \sqrt{2}) = x$.
   Namig: $x^2 - 2xy - y^2 = x^2 - 2xy + y^2 - 2y^2 = (x - y)^2 - 2y^2$.

3. $z = a + ib$; A: Za $b > 0$ območje določeno z $b < \sqrt{3}\,|a|$ in za $b < 0$ območje določeno z $b < -\sqrt{3}\,|a|$. B: Pomagaj si s polarnim zapisom: $zi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = r(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}))$. Kot se poveča za $\frac{\pi}{2}$. Elemente množice B dobimo tako, da elemente množice A zavrtimo za kot $\frac{\pi}{2}$.

4. $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$ in $z^{10} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. a) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   b) Če upoštevaš rezultat 4. naloge, dobiš: $z^5 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zato je potrebno rešiti enačbo: $z^5 = i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rešitve so: $z_k = \sqrt[10]{\frac{3}{4}}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, kjer je $\varphi_k = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, \ldots 4$.

6. V množici so vsa števila $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kjer je r poljubno število iz $\mathbb{R}^+$ ter $\varphi = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}$ za nek $k = 0, 1, 2, 3$.

7. a) $\frac{7}{\sqrt{3}+1}$ b) 4 c) 2 d) 3 e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{6}$ g) e h) 1.

8. a) $a = e$.
   b) Tak a ne obstaja, saj je leva limita enaka -1, desna pa 1.

9. $a = -\frac{3}{2}$, $b = 3$.

10. $a = 1$, $b = \frac{1}{\ln 2}$.

11. a) 0 b) 1 c) e^2 d) $e^{-\frac{3}{4}}$.