

Vaje za 3. kolokvij iz Osnov analize

1. Izračunaj odvod funkcije f :

a) $f(x) = e^{x^{-2}}$

b) $f(x) = \arctg(\cos x)$

c) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $f(x) = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$

e) $f(x) = x^{\ln x}$

f) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

2. Funkcija f je podana s predpisom:

$$f(x) = e^{2x} \sqrt{2x^2 - 4}.$$

Zapiši enačbo tangente na graf funkcije f v točki z absciso $x = 2$.

3. Za katere vrednosti realnega parametra a , bo normala na graf funkcije $f(x) = \sqrt{\ln x}$ v točki $(e, f(e))$, tudi tangenta na graf funkcije $g(x) = x^2 + a$ v neki točki?

4. Naj bo t taka tangenta na graf funkcije $f(x) = \sqrt{2x}$, ki s koordinatnima osema tvori enakokrak trikotnik. Za katere vrednosti $a \in \mathbb{R}$ je premica t tudi normala na graf funkcije $g(x) = x^2 - 6x + 9 + a$ v neki točki?

5. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sh} x}{(e^x - 1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \ln(x+1))$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\ln(1-x)} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.

6. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov (razen pri d, tam upoštevaj samo pomen prvega odvoda) in čim natančneje skiciraj grafe naslednjih funkcij:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

c) $f(x) = x \ln(x^2)$

d) $f(x) = \arccos\left(\frac{2-x}{x^2}\right)$

e) $f(x) = x^2 \sqrt{x+1}$

f) $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

7. V kroglo s polmerom R vrtamo pokončni valj. Določi dimenzije vrtanega valja tako, da bo imel največjo prostornino.

8. Naj bo $T(x, y)$ točka na krožnici $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $A_T(x, 0)$ in O koordinatno izhodišče. Med vsemi takimi točkami T poišči tisto, za katero je ploščina trikotnika TA_TO največja.

9. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom: $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$. Zapiši enačbo tiste tangente na graf funkcije f , ki ima največji smerni koeficient.

10. Izračunaj integrale:

a) $\int x^2 \cos x \, dx$

b) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \, dx$

c) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

d) $\int \frac{\ln(2 - \operatorname{ctg} x)}{\sin^2 x} \, dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}} \, dx$

f) $\int \ln^2 x \, dx$.

Rešitve:

1. a) $f'(x) = -2x^{-3}e^{x^{-2}}$.
b) $f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.
c) $f'(x) = \frac{3x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
d) $f'(x) = 2 \sin(\ln x)$.
e) $f'(x) = x^{\ln x} \frac{2}{x} \ln x$.
f) $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$.
2. $y = 2e^4(3x - 5)$.
3. $a = 3e^2 + 1$.
4. $a = \frac{11}{4}$.
5. a) 1.
b) 0.
c) $\frac{1}{2}$.
d) 1.
6. Rešitve boste dobili na vajah.
7. $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.
8. $T_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $T_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
9. $8y = x + 3$.
10. a) $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.
b) $\frac{2}{3}\sqrt{(1 + \ln x)^3} + C$.
c) $2\sqrt{1+x} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$.
d) $(2 - \operatorname{ctg} x) \ln(2 - \operatorname{ctg} x) - 2 + \operatorname{ctg} x + C$.
e) $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + C$.
f) $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$.