VRSTE

Za zaporedje a_n s simbolom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ označujemo **vrsto** s splošnim členom a_n. Hkrati z istim simbolom označujemo tudi vsoto te vrste (če obstaja). Ko govorimo o vrsti, mislimo na to, da hkrati z zaporedjem a_n obravnavamo še zaporednje delnih vsot te vrste (s_n) $(s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

Vrsta s splošnim členom a_n je zaporedje delnih vsot. Vsota vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita zaporedja delnih vsot: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Če je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, pišemo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = L$ in pravimo, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergira**, če je $L \in \mathbb{R}$, v nasprotnem primeru ($L = \infty$, $L = -\infty$ ali L ne $\exists$) pa pravimo, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergira**.

$$\boxed{\text{Če vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira, je } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$$

Primer:
Geometrijska vrsta: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots$. Geometrijska vrsta konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$ in takrat velja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Primer:
Harmonična vrsta: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$. Harmonična vrsta divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergira} \iff s > 1\,.$$

Leibniz: Naj bo $a_n \geq 0$ padajoče zaporedje. Če velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ konvergira.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutno konvergira**, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Kriteriji za konvergentnost vrst s pozitivnimi členi

Primerjalni kriterij I

Naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \leq a_n \leq b_n$. Potem velja:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Primerjalni kriterij II

Naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n, b_n > 0$ in $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$. Potem velja:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Če je $L = 0$ iz konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi konvergenca $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Za $L = \infty$ pa iz divergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi divergenca $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kvocientni oz. D'Alembertov kriterij

Naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > 0$ in $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Potem velja:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $q < 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, če je $q > 1$.

Korenski oz. Cauchyjev kriterij

Naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > 0$ in $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Potem velja:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $q < 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, če je $q > 1$.

POTENČNE VRSTE

Naj bo (a_n) realno zaporedje in $a \in \mathbb{R}$. Funkcijski vrsti

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

pravimo **potenčna vrsta**.

Primer: Za $a_n = 1$ in $a = 0$ dobimo geometrijsko vrsto $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ki konvergira natanko tedaj, ko je $|x| < 1$ in takrat velja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Za vsako potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ obstaja tak $0 \leq R \leq \infty$, da vrsta konvergira za vse x z lastnostjo $|x-a| < R$ in divergira za vse x z lastnostjo $|x-a| > R$. R imenujemo **konvergenčni polmer** vrste. Konvergenco za $x = \pm R$ moramo preveriti posebej.

- Denimo, da obstaja $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$. Potem je konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ enak $R = \frac{1}{\alpha}$.
- Denimo, da obstaja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$. Potem je konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ enak $R = \frac{1}{\alpha}$.
- Potenčna vrsta $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s konvergenčnim polmerom različnim od 0 je poljubno mnogo krat odvedljiva funkcija. Odvajamo jo členoma: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
- Če ima potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergenčni polmer različen od 0, potem je $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Taylorjeva vrsta

Naj bo funkcija f poljubno mnogo krat odvedljiva v točki a. Potenčni vrsti

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

pravimo **Taylojeva vrsta** funkcije f okoli točke a.

Taylorjeva vrsta potenčne vrste je ta vrsta sama.

Pomembne Taylorjeve vrste:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \ x \in (-1, 1]$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \ \forall x \in [-1, 1]$$