Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko

Petra Žigert

Zbirka pisnih delov izpitov in kolokvijev iz

OSNOV ANALIZE

Študijsko gradivo za študente 1.letnika smeri Matematika in ...

Maribor, 2002

Pisni deli izpitov

22.1.1997

1. a) Skiciraj množico $D \subseteq \mathbf{C}$, ki je definirana kot

$$D = \{ \, z \in \mathbf{C} \; ; \; \mathcal{R}e(z)^3 > 0 \, \} \, .$$

   b Za katera naravna števila n in kompleksna števila a ležijo vse rešitve enačbe $z^n = a$ v množici D ?

2. Dana je funkcija f :

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & ; \quad x < 1 \, , \\ 1 & ; \quad x = 1 \, , \\ 2 + x^2 & ; \quad x > 1 \, . \end{cases}$$

   a) Poišči naslednje limite, če le te obstajajo:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to 1+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to 1} f(x) \, .$$

   b) Ali je funkcija f zvezna v točki $x = 1$? Utemelji odgovor!

3. Podani sta paraboli:

$$\begin{array}{rcll} y & = & 4x^2 & \qquad \text{in} \\ y & = & -\frac{4}{3}x^2 + 12 \, . & \end{array}$$

   a) Izračunaj presečni kot med parabolama.

   b) "Raztegni" parabolo $y = 4x^2$ z realnim številom a tako, da bo presečni kot med novo nastalo parabolo in parabolo $y = -\frac{4}{3}x^2 + 12$ enak 90° .

4. Izračunaj nedoločeni integral :

$$\int \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16} dx \, .$$

12.2.1997

1. Podane so funkcije:

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & , & f(x) = x \, , \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ & , & g(x) = e^x \quad \text{in} \\ h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} & , & h(x) = \ln x \, . \end{array}$$

a) Ali je $g \circ h = h \circ g$?

b) Ali je kateri od kompozitov iz točke a) enak funkciji f?

c) Skiciraj grafe funkcij $g + h$, $g - h$ in $g \cdot h$.

2. Podana je funkcija

$$f(x) = (x-a)^{\frac{1}{3}}(2x-a)^{\frac{2}{3}}, a \in \mathbb{R}^+$$

a) Poišči lokalne ekstreme funkcije f.

b) Določi intervale naraščanja in padanja funkcije f.

c) Skiciraj graf funkcije f.

3. Podano je zaporedje

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}.$$

a) Ali je zaporedje a_n monotono. Utemelji odgovor.

b) Poišči $\sup a_n$ in $\inf a_n$.

c) Poišči vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, če le ta obstaja.

4. Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2-4x-3}}\, dx.$$

16.4.1997

1. Dani sta funkciji f in g:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \leq 0, \\ 1-x & ; \quad 0 < x < 1, \\ 1 & ; \quad x \geq 1. \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad x \leq 0, \\ 3-2x & ; \quad 0 < x < 1, \\ 3x & ; \quad x \geq 1. \end{cases}$$

a) Poišči $g \circ f$.

b) Ali je funkcija $g \circ f$ zvezna v točki $x = 1$? Utemelji odgovor!

2. S pomočjo Rollojevega izreka pokaži, da ima polinom $p(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$ samo eno realno ničlo.

3. Določi oz. nariši množico točk v kompleksni ravnini, za katere velja:

a) $|z+1| \leq |2z-1|$,

b) $z^3 = i - 1$.

4. Kateri izmed pravokotnikov, ki jih lahko včrtamo v pravokoten trikotnik s stranicami 5,12 in 13 cm tako, da leži eno oglišče na hipotenuzi, dve stranici pa na katetah trikotnika, ima največjo ploščino?

5. S pomočjo integrala izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje krivulja z enačbo $y^2 = x^2 - x^4$.

10.6.1997

1. Dokaži Bernoullijevo neenakost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,,$$

Če je $n = 2, 3, \ldots$ in $x > -1$ ter $x \neq 0$.

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; \quad x < 1 \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} & ; \quad x = 1 \\ x^{\frac{1}{3}} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Poišči naslednje limite, če le te obstajajo:

$$\lim_{x \to 1-} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 1+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 1} f(x)\,.$$

b) Ali je funkcija f zvezna v točki $x = 1$? Utemelji odgovor.

3. Kateri pravokotnik s stranicama a in b ima največjo ploščino, če ga včrtamo

a) krogu s polmerom r,

b) enakokrakemu trikotniku z osnovnico o in krakom k?

4. Poišči konvergenčno območje in konvergenčni polmer vrst

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{x}{2}^{n}\,,$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}\,.$$

1.7.1997

1. Dani sta funkciji f in g:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| \le 1\,, \\ 1 & ; \quad |x| > 1\,. \end{cases} \qquad , \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad |x| \le 2\,, \\ -1 & ; \quad |x| > 2\,. \end{cases}$$

   a) Poišči $g \circ f$.

   b) Poišči $f \circ g$.

2. a) S pomočjo Lagrangevega izreka pokaži:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}\ ,\ a < b\,.$$

   b) Z uporabo neenakosti iz točke a.) pokaži

$$\frac{3}{25} < \arctan\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{6}\,.$$

3. Izračunaj ploščino območja določenega z neenačbama:

$$y \le 2 - x^2 \quad \text{in} \quad \frac{2x^2}{x^2+1} \le y\,.$$

4. Razišči konvergentnost vrst

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\ln 10^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

1.9.1997

1. Pokaži, da je izraz

$$5^n + 2^{n+1}$$

   deljiv s številom 3 za vsak n iz množice naravnih števil.

2. Poišči naslednji limiti:

   a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$,

   b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

3. Podana je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$.

   a) Poišči intervale naraščanja (padanja) ter konveksnosti (konkavnosti) funkcije $f(x)$.

   b) S pomočjo prvega in drugega odvoda nariši graf funkcije $f(x)$.

4. Izračunaj ploščino območja med x-osjo in grafom funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$, pri čemer je x nenegativno število.

15.9.1997

1. Podano je kompleksno število $z_1 = 1 + i$. Poišči kompleksno število z, če velja:

   a) $|z + z_1| = 1$,
      $\mathcal{R}e(z + z_1) = 0$.

   b) $|z \cdot \overline{z}_1| = 2$,
      $\mathcal{R}e(z \cdot z_1) = 0$.

2. Podano je zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cos(n\pi)$.

   a) Ugotovi, ali je zaporedje a_n monotono.

   b) Ugotovi, ali je zaporedje a_n omejeno.

   c) Ugotovi, ali je zaporedje $b_n = (-1)^n a_n$ konvergentno.

   Utemelji vse odgovore.

3. Koš za smeti ima obliko valja in drži $50l$. Cena materijala za pokrov je $150\, SIT/m^2$, za ostali del koša pa $100\, SIT/m^2$. Kakšnih dimenzij naj bo koš za smeti, da bomo za izdelavo porabili čim manj denarja?

4. Poišči prostornino telesa, ki nastane pri vrtenju okoli y-osi območja, omejenega z
$$y = 2x \quad \text{in} \quad y = x^2 .$$

20.6.2000

1. Zaporedje je podano s splošnim členom
$$a_n = \frac{(n^3 + n)^{\frac{1}{3}}}{n + 1} .$$

a) Ugotovi, ali je zaporedje a_n monotono.

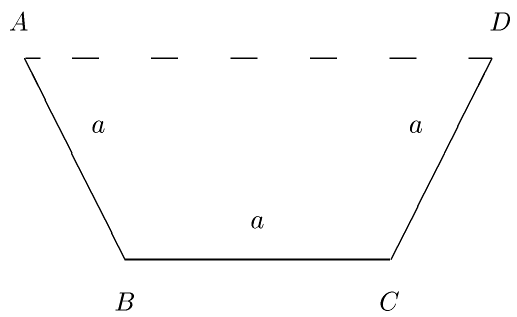
b) Poišči limito zaporedja a_n, če le ta obstaja.

Utemelji odgovora.

2. Grafično in računsko reši neenačbo

$$||x+2|-|x-1|| < 1\,.$$

3. Iz treh desk dolžine a želimo sestaviti žleb tako, da bo presek enakokrak trapez (glej sliko). Pri katerem kotu BAD bo ploščina preseka največja?



4. V kakšnem razmerju deli parabola $y^2 = 2x$ ploščino kroga $x^2 + y^2 = 8$?

3.7.2000

1. Z matematično indukcijo pokaži, da za vsako naravno število velja neenakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1}-1)\,.$$

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; \quad x < 0 \\ -3x^3 + 2x + c & ; \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

a) Določi realno konstanto c tako, da bo funkcija $f(x)$ zvezna na $\mathbb{R}$.

b) Nariši graf funkcije $f(x)$ (upoštevaj kostanto c iz točke a)).

3. V kroglo s polmerom R včrtamo pokončni stožec. Pri kateri višini stožca ima le ta največjo prostornino?

4. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, če lik

$$D = \{(x,y)\,;\, x^2 + 2x + 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\}$$

zavrtimo okoli y osi.

31.8.2000

1. a) Naj bo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Z matematično indukcijo pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,.$$

   b) Pokaži, da je

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)\,.$$

   (Namig: v enakosti iz točke a) naj bo $x = \frac{b}{a}$.)

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1 - (\ln x)^2}\,.$$

   a) Poišči definicijsko območje, ničle in pole funkcije f.
   b) Določi ekstreme ter intervale naraščanja in padanja funkcije f.
   c) Z uporabo podatkov iz točk a) in b) načrtaj graf funkcije f.

3. S keramičnimi ploščicami želimo obložiti bazen v obliki valja, katerega prostornina je 27 m^3. Kakšna morata biti premer in globina bazena, da bomo porabili čimmanj keramičnih ploščic?

4. Del funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}|x - 3|$$

med njenima ničlama zavrtimo okoli x osi. Izračunaj površino tako nastale vrtenine.

14.9.2000

1. Zaporedje je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n - 1}\,.$$

   a) Pokaži, da je zaporedje a_n monotono in poišči njegovo limito.

   b) Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira in določi vrsto konvergence (pogojna/absolutna).

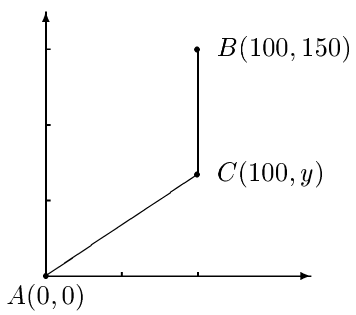
2. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin x & ; \quad |x| < 1 \\ \arcsin \frac{1}{x} & ; \quad |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

   a) Skiciraj graf funkcije f.

   b) Ugotovi, ali je funkcija f zvezna. Utemelji odgovor.

3. Cestno podjetje gradi cesto iz kraja $A(0,0)$ v kraj $B(100,150)$. Cena tekočega metra ceste na območju $0 \leq x < 100$ je 2 milijona SIT$/m^2$, na premici $x = 100$ pa je cena nižja in sicer znaša 1 milijon SIT$/m^2$.
   Določi potek ceste oz. koordinate točke C tako, da bo cestno podjetje imelo čim manj stroškov.



4. Izračunaj integrala

   a)
$$\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)}\,,$$

   b)
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}\,.$$

22.1.2001

1. Dani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad x < 0 \\ 3x - 1 & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \mathrm{e}^x & ; \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x - \pi & ; \quad |x| > \pi \\ \sin^2 x & ; \quad |x| \leq \pi. \end{cases}$$

   Poišči kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

2. a) Računsko poišči realna števila, ki zadoščajo neenačbi

$$|2x + 3| < x^2.$$

   b) Poišči kompleksna števila, ki zadoščajo pogojema

$$|z^2 - 2i| = 4, \left|\frac{z + 1 + i}{z - 1 - i}\right| = 1.$$

3. V polkrog s polmerom R včrtamo enakokrak trapez tako, da njegova osnovnica leži na premeru. Kakšen naj bo kot α med osnovnico in krakom trapeza, da bo ploščina trapeza maksimalna?

4. Funkcijska vrsta je podana s predpisom

$$\log_{\frac{1}{8}} x + \log^2_{\frac{1}{8}} x + \log^3_{\frac{1}{8}} x + \ldots.$$

   a) Poišči vse tiste x-se, za katere funkcijska vrsta konvergira.

   b) Izračunaj vsoto funkcijske vrste.

5.2.2001

1. Z matematično indukcijo pokaži, da velja

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

2. Zaporedje a_n je podano rekurzivno s predpisom

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2n},\ a_1 = 1.$$

   a) Pokaži, da je zaporedje a_n monotono.

   b) Poišči natančno spodnjo in zgornjo mejo zaporedja a_n, če le ti obstajata.

c) Če je zaporedje a_n konvergentno, potem poišči njegovo limito.

3. Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(x) = (7 + 2\cos x)\sin x.$$

a) Poišči ničle in ekstreme funkcije f.

b) Poišči intervale naraščanja in padanja ter konveksnosti in konkavnosti funkcije f.

c) Z uporabo podatkov iz točk a) in b) nariši graf funkcije f.

4. Z uporabo določenega integrala izračunaj obseg lika, ki je določen z neenakostima

$$y^3 \geq x^2 \quad \text{in} \quad y \leq \sqrt{2 - x^2}.$$

13.6.2001

1. Računsko in grafično poišči rešitve neenačbe

$$|\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6| < |x + 1| - 2\,.$$

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & ; \quad x \neq 0 \\ a & ; \quad x = 0\,. \end{cases}$$

a) Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo f zvezna v $x = 0$.

b) Ali je f odvedljiva v $x = 0$? Utemelji odgovor.

3. Poišči točke, v katerih tvori normala na funkcijo

$$f(x) = x^2(x + 2)$$

s premico $y = 4x - 2$ kot $\frac{\pi}{4}$.

4. Funkcijo

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$$

na intervalu $[0, \infty)$ zavrtimo okoli x-osi. Izračunaj prostornino tako nastale vrtenine.

27.6.2001

1. Poišči naslednji množici točk in ju predstavi v kompleksni ravnini:

a) $A = \{z \in \mathbb{C};\, \mathrm{Im}(z^2\overline{z} + 4i) = 4, \mathrm{Re}(z\overline{z} - i) = 3\}$ in
b) $B = \{z \in \mathbb{C};\, \overline{z}^3 - i = 1\}$.

2. Podani sta parabola $y = -x^2 + 2x + 1$ in premica $p : 3x - 2y = 2$.

   a) Pod kakšnim kotom se sekata tangenta na parabolo v točkah $A(x, 1)$ in premica p?

   b) Poišči enačbo tangente na parabolo v točki, kjer je ta tangenta vporedna premici p.

3. Izračunaj površino rotacijskega telesa, ki ga dobimo pri vrtenju krivulje

$$y^2 = x + 2\,,\ x \le 0\,,$$

okoli y-osi.

4. Določi konvergenčno območje funkcijske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+3)\,x^{2n}}\,.$$

29.8.2001

1. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & ;\quad x > 1 \\ 1 - x^2 & ;\quad |x| \le 1 \\ 0 & ;\quad x < -1 \end{cases} \qquad \text{in}$$

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & ;\quad |x| > 1 \\ \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}}\,x + \frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}} & ;\quad |x| \le 1 \end{cases}$$

Poišči kompozituma $f \circ f$ in $g \circ f$.

2. Polmer krogle r zmanjšamo za 2 odstotka. Za koliko odstotkov se spremenita prostornina in površina krogle?

3. Dana je funkcija

$$f(x) = x(x+1)^{\frac{2}{3}}\,.$$

   a) Poišči definicijsko območje, ničle in pole funkcije f ter preveri njeno obnašanje na robu definicijskega območja.

   b) Poišči ekstreme in določi intervale naraščanja oziroma padanja ter konveksnosti oziroma konkavnosti funkcije f.

c) Z uporabo podatkov iz točk a) in b) nariši graf funkcije f.

4. Poišči ploščino območja, ki ga na intervalu $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ oklepata funkciji $\sin x$ in $\cos x$.

12.9.2001

1. a) Za katere logične vrednosti enostavnih izjav p, q, r je resnična sestavljena izjava
$$(q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (p \vee r \Rightarrow q)\,?$$
b) Dokaži, da za poljubne množice A, B, C, D velja enakost
$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)\,.$$

2. Z matematično indukcijo dokaži,

a) da za vsako naravno število $n \geq 2$ velja enakost
$$\sum_{k=2}^{n} 3(2k-1)^2 = n(4n^2-1) - 3\,,$$
b) in za vsako naravno število n velja neenakost
$$2^n \geq n\,.$$

3. Poišči točke, v katerih je normala na funkcijo $f(x) = sin(2x)$ vzporedna tangenti na funkcijo $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ v točki $T(1, 2)$.

4. Poišči prostornino rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju okoli y-osi območja, omejenega s tistima deloma premic $y = 3x$ in $y = -3x$, ki ležita pod x-osjo in je obenem omejen s parabolo $y = 4 - x^2$.

23.1.2002

1. Računsko in grafično poišči rešitev neenačbe
$$|4 - x| \geq |x^2 - 4| + 2\,.$$

2. Podan je krožni izsek s polmerom $r = 100$ cm in središčnim kotom $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Za koliko se spremeni ploščina krožnega izseka, če se

a) polmer r poveča za 1 cm,

b) središčni kot φ zmanjša za $\frac{1}{2}^\circ$?

3. Določi površino telesa, ki ga dobimo, če okoli x-osi vrtimo funkcijo

$$y = a \cdot \cos \frac{\pi x}{2b}, \; a, b \in \mathbb{R}^+, \; |x| \le b\,.$$

4. Podana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,.$$

a) Pokaži, da vrsta absolutno konvergira za vsako realno število x.

b) Izračunaj vsoto vrste.

6.2.2002

1. Dokaži z matematično indukcijo, da za vsako naravno število n veljata

a) Moivreova formula

$$(\cos x + i\, \sin x)^n = \cos(nx) + i\, \sin(nx) \qquad \text{in}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{18}{3^{i-1}} = 27(1 - \frac{1}{3^n})\,.$$

2. Izračunaj naslednji limiti:

a)

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \; a > 0\,,$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x) + \mathrm{tg}^2 x}{x \cdot \sin x}\,.$$

3. Podani sta funkcija $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 1}$ in premica $p\,:\, 4x + y - 2 = 0$.

a) Pod kakšnim kotom se sekata tangenta na funkcijo $f(x)$ v točki $A(0, y)$ in premica p?

b) Poišči točke, v katerih je tangenta vzporedna premici p.

4. Izračunaj nedoločena integrala

a)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\, dx\,,$$

b)

$$\int \frac{dx}{1+b\sin^2(ax)},\ a,b \in \mathbb{R}^+.$$

Kolokviji

1. kolokvij 1996-97

1. Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ in poljubno naravno število n velja naslednja neenakost
$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}\,.$$

2. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirani na naslednji način
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad |x| < \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

   a) Poišči $(f \circ g)(x)$ in $(g \circ f)(x)$.

   b) Nariši grafe $f(x)$, $g(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$.

3. **a)** Skiciraj množico $D \subseteq \mathbb{C}$, ki je definirana kot
$$D = \{\, z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathcal{I}m(\overline{z})^3 < 0 \,\}\,.$$

   b Skiciraj množico $Z \subseteq \mathbb{C}$, ki je definirana kot
$$Z = \{\, f(z) \in \mathbb{C}\ ;\ f(z) = z \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\ ,\ z \in D \,\}\,.$$

4. Podano je zaporedje $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$.

   a) Ugotovi, ali je zaporedje a_n monotono.

   b) Ugotovi, ali je zaporedje a_n omejeno.

   c) Poišči limito zaporedja a_n, če le ta obstaja (dokaz ni potreben).

   d) Pokaži, da zaporedje $b_n = (-1)^{n+1} a_n$ ni konvergentno.

1. kolokvij 1999-00

1. Dani sta funkciji

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ; \quad x<0 \\ x^2+1 & ; \quad x\geq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x)=\begin{cases} -4 & ; \quad x<0 \\ x^2-4 & ; \quad 0\leq x<2 \\ \ln(x-1) & ; \quad x\geq 2\,. \end{cases}$$

Poišči kompozituma $f\circ g$ in $g\circ f$.

2. Z indukcijo dokaži:

   a) $9|10^n+3\cdot 4^{n+1}+5$,

   b) $\sqrt{p^n}+\sqrt{q^n}\leq\sqrt{(p+q)^n}\,,\quad p,q\geq 0,\, n\in\mathbb{N},\, n\geq 2.$

3. Grafično in računsko poišči rešitvi neenačb:

   a) $|x+5|-1\leq -2$ in

   b) $|x-2|+1>|x^2-2x-3|$.

4. Poišči naslednji množici točk in ju predstavi v kompleksni ravnini:

   a) $A=\{z\in\mathbb{C};\, \mathrm{Im}(z\overline{z}^2+2i)=2, \mathrm{Re}(\overline{z}+3i-1)=3\,\}$ in

   b) $B=\{z\in\mathbb{C};\, \overline{z}^4+1=i\,\}$.

1. kolokvij 2000-01

1. Za poljubne množice A,B,C dokaži enakosti

   a) $A-(A-(B-(B-C)))=A\cap B\cap C$,

   b) $((A\cap C)\cup(B\cap C^C))^C=(A^C\cap C)\cup(B^C\cap C^C)$.

2. Dani sta funkciji $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & ; \quad x<-1 \\ 4x^2-1 & ; \quad |x|\leq 1 \\ x-4 & ; \quad x>1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x)=\begin{cases} -\frac{2}{\pi}x-2 & ; \quad x<-\frac{\pi}{2} \\ \sin x & ; \quad |x|\leq\frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \quad x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Poišči kompozitum $f\circ g$ ter preveri, če je kompozitum injektivna oziroma surjektivna preslikava.

3. Z matematično indukcijo pokaži, da je

   a) $\frac{n(n-3)}{2}$ število diagonal v poljubnem konveksnem n-kotniku in

   b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{18}{3^{k-1}}=27(1-\frac{1}{3^n}).$$

4. a) Računsko poišči rešitve neenačbe

$$|x^2 - 3| < |3x + 1|\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Poišči rešitev enačb

$$\arg(1+z) = \frac{\pi}{4} \quad \text{in} \quad |1+z| = 4\,, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2. kolokvij 1996-97

1. Izračunaj naslednje limite:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{3}} - 1}{x}\,,$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}\,,$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} sin\, x - 1}{1 - tg^2\, x}\,.$$

2. Podane je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x-2}} & ; \quad x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)\,, \\ \frac{1}{2} + tg(\frac{\pi}{4}x) & ; \quad x \in [0, 2]\,. \end{cases}$$

a) Skiciraj graf funkcije f.

b) Poišči naslednje limite, če le te obstajajo:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} f(x)\,.$$

c) Ali je funkcija f zvezna v točki $x = 0$?

3. Skiciraj grafe funkcij:

a) $y = (ln\, \frac{1}{x})^{-1}$,

b) $y = arctg\, |\frac{1}{x}|$,

4. Podani sta parabola $y = x^2 + 4x + 2$ in premica $p\,:\, 2x - 4y + 5 = 0$.

a) Pod kakšnim kotom se sekata tangenta na parobolo v točki $A(0, y)$ in premica p?

b) Poišči enačbo tangente na parabolo v točki, kjer je ta tangenta pravokotna na premico p.

2. kolokvij 1999-00

1. Zaporedje je podano s splošnim členom

$$a_n = 2 - (-1)^n \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

   a) Ugotovi, ali je zaporedje a_n omejeno.
   b) Ugotovi, ali je zaporedje a_n monotono.
   c) Poišči limito zaporedja a_n.
   d) Ugotovi, od katerega člena naprej so vsi členi zaporedja v $\varepsilon = \frac{1}{100}$ okolici limite.

   Utemelji vse odgovore.

2. Izračunaj naslednje limite:

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(6x)}{7x^2}$$

$$b) \quad \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$$

$$c) \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{1}{4}} - 1}.$$

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\pi}{4}x & ; \quad x \leq -2 \\ \arcsin(ax) + b & ; \quad |x| < 2 \\ \frac{\pi}{2}(x^2 - 4x + 3) & ; \quad x \geq 2. \end{cases}$$

   Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna.

4. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x^2)}.$$

   a) Poišči definicijsko območje funkcije f.
   b) Ugotovi, ali je funkcija f soda ali liha.
   c) Skiciraj graf funkcije f.

2. kolokvij 2000-01

1. Zaporedje a_n je podano rekurzivno s predpisom
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 3},\ a_1 = 1.$$
   a) Pokaži, da je zaporedje a_n monotono.
   b) Poišči natančno spodnjo in zgornjo mejo zaporedja a_n, če le ti obstajata.
   c) Če je zaporedje a_n konvergentno, potem poišči njegovo limito.

2. Izračunaj limite:
$$a)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}),\quad b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}},$$
$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)^{\operatorname{tg} x}}{1-\cos x},\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x^2+\frac{5}{2}x+1)}{x}.$$

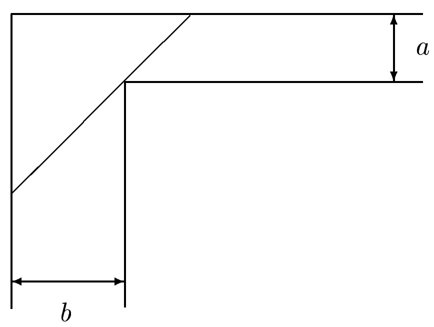
3. Funkcija $f(x)$ je podana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & ; \quad x < -3 \\ g(x) & ; \quad |x| \le 3 \\ \log_3 x & ; \quad x > 3. \end{cases}$$
Določi $g(x)$ tako, da bo funkcija f zvezna na $\mathbb{R}$, pri čemer naj bo $g(x)$ polinom tretje stopnje, ki poteka skozi točki $(0,-1)$ in $(1,0)$.

4. Poišči definicijski območji funkcij in ju skiciraj:
   a) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$,
   b) $g(x) = \dfrac{1}{|\ln x^2| + 1}$.

3. kolokvij 1996-97

1. Podana je funkcija $f(x) = x^2 \sin(ax)$.
   a) Izračunaj $f^{(50)}(x)$.
   b) Izrazi $f^{(2n+1)}(x)$.

2. Hodnik je oblike kot na sliki. Na eni strani je širok a, na drugi pa b. Kako dolgo palico lahko nesemo skozi hodnik, če je $a = \sqrt{3}$ m in $b = 9$ m?



3. Podana je funkcija $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$. S pomočjo prvega in drugega odvoda
   a) poišči intervale naraščanja oz. padanja funkcije f,
   b) poišči intervale konveksnosti oz. konkavnosti funkcije f,
   c) nariši graf funkcije f.

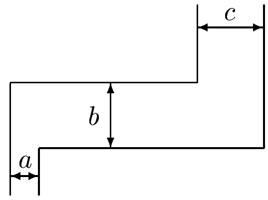
4. Izračunaj nedoločena integrala
   a) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{-x^2-4x-3}}\, dx$,
   b) $\int \dfrac{2a\cos^2 x}{\sin^2 x + a\cos^2 x}\, dx$.

3. kolokvij 1999-00

1. Podani sta parabola $y^2 = 4x + 1$ in premica $y = 2x + \frac{1}{2}$. V katerih točkah parabole tvori njena tangenta s premico kot $45°$?

2. Dana je funkcija
$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^3} .$$
   a) Poišči definicijsko območje funkcije f, ničle, pole in ekstreme.
   b) Poišči intervale naraščanja in padanje funkcije f.
   c) Poišči intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.
   d) Načrtaj graf funkcije f.

3. Oblika hodnika je razvidna iz slike, pri čemer je $a = \sqrt{3}$m, $b = 9$m, $c = 5$m. Kako dolgo palico lahko nesemo skozi hodnik, če jo vseskozi držimo v vodoravnem položaju?



4. a) Z uporabo Lagrangeovega izreka pokaži neenakost:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}\,, \quad a < b\,.$$

b) Z uporabo neenakosti iz točke a) pokaži:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{arctg}\frac{4}{3} < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}\,.$$

3. kolokvij 2000-01

1. Poišči točko v prvem kvadrantu, v kateri tangenta na elipso

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

odreže enako dolgo odseka po obeh koordinatnih oseh.

2. Dana je funkcija

$$f(x) = x^2\sqrt[3]{x+2}\,.$$

a) Poišči definicijsko območje, ničle in pole funkcije f ter preveri njeno obnašanje na robu definicijskega območja.

b) Poišči stacionarne točke, ekstreme, intervala naraščanja-padanja in konveksnosti-konkavnosti funkcije f.

c) S pomočjo podatkov iz točk a) in b) nariši graf funkcije f.

3. Izmed vseh takšnih pravokotnikov, pri katerih dve oglišči ležita na x-osi, drugi dve pa nad x-osjo in na paraboli $y = 16 - x^2$, poišči tistega z največjo ploščino.

4. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} & ; \quad x > 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \\ ax^2 + bx & ; \quad x < 1\,. \end{cases}$$

Določi parametra $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f odvedljiva na $\mathbb{R}$.

4. kolokvij 1996-97

1. Poišči ploščino območja med grafom fukcije $f(x) = \dfrac{2x}{e^{3x^2}}$ in x- osjo.
2. Območje D leži v II.kvadrantu in ga določata neenakosti

$$x^2 + (y-2)^2 \geq 4 \quad \text{in} \quad x^2 + (y+1)^2 \leq 9\,.$$

   Poišči prostornino rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju območja D okoli y- osi.
3. Podana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,.$$

   a) Pokaži, da vrsta absolutno konvergira za vsako realno število x.
   b) Izračunaj vsoto vrste.
4. Dana je vrsta

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots\,.$$

   a) Določi konvergenčno območje.
   b) Izračunaj vsoto vrste.

4. kolokvij 1999-00

1. Izračunaj nedoločena integrala:
   a)
$$\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}\,,$$
   b)
$$\int \frac{dx}{\sin^6 x}\,.$$
2. a) Izračunaj ploščino območja omejenega z

$$y = |\log x|\,,\ y = 0\,,\ x = \frac{1}{10}\,,\ x = 10\,.$$

   b) Izračunaj dolžino loka funkcije $y = |\log x|$ med $x = \frac{1}{10}$ in $x = \mathrm{e}$.

3. Deltoid je določen z oglišči $(0,3),(2,1),(0,-4),(-2,1)$. Del deltoida nad osjo x zavrtimo okoli osi y. Z integralom izračunaj prostornino tako nastale vrtenine.

4. a) Dana je funkcijska vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^3 x^{2n}} .$$
Poišči konvergenčno območje vrste. Konvergentnost vrste na robovih konvergenčnega območja preuči z uporabo Cauchyjevega integralskega kriterija.

   b) Izračunaj vsoto številske vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} .$$

4. kolokvij 2000-01

1. Izračunaj nedoločena integrala

   a)
$$\int \frac{(x+1)^2}{x^4+2x^2-3}\, dx ,$$

   b)
$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} .$$

2. Funkcijo $y = -\ln(2x)$, $x \in (0, \frac{1}{2}]$, zavrtimo okli y-osi. Izračunaj površino nastalega rotacijskega telesa.

3. Določi konvergenčni polmer potenčne vrste
$$1 - 3x^2 + 5x^4 - ... + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + ...$$
ter s pomočjo integriranja in odvajanja po členih določi vsoto vrste.

4. Razvij v Taylorjevo vrsto funkciji

   a) $\sin \frac{x}{3}$ v okolici točke $x = 0$ in

   b) $\ln(x-1)$ v okolici točke $x = 2$

   tako, da izraziš splošna člena obeh vrst.