1 Osnove kombinatorike

1.1 4 osnovna pravila kombinatorike

Pravilo produkta:
Če lahko element $a \in A$ izberemo na n načinov, element $b \in B$ na m načinov, lahko urejeni par (a, b) izberemo na $n \cdot m$ načinov:

$$|A| = n; |B| = m \Longrightarrow |A \times B| = n \cdot m$$

Pravilo vsote:

$$|A| = n; |B| = m; A \cap B = \emptyset \Longrightarrow |A \cup B| = n + m$$

Dirichletovo načelo (princip golobnjaka):

Če n predmetov zložimo v m predalov, kjer je $n > m$, tedaj sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Posplošitev Dirichletovega načela:

Če $n = k \cdot m + r$, kjer je $r \geq 1$, predmetov zložimo v m predalov, kjer je $n > m$, tedaj bo vsaj v enem predalu vsaj $k + 1$ predmetov.

Pravilo štetja parov:
Naj bosta X in Y končni množici ter R binarna relacija na množici $X \times Y$. Če označimo

$$v_x(R) = (x, y)|(x, y) \in R, y \in Y$$
$$s_y(R) = (x, y)|(x, y) \in R, x \in X,$$

potem velja:

$$|R| = \sum_{x \in X} |v_x(R)| = \sum_{y \in Y} |s_y(R)|$$

Naloge:

1. Na razpolago imamo 6 različnih kuvert in 4 različne znamke. Na koliko načinov lahko
   (a) izberemo kuverto z znamko?
   (b) polepomo vse 4 znamke na kuverte?
   (c) polepimo vse znamke na kuverte tako, da je na vsaki kuverti največ ena znamka?
2. Profesor je pozabil dežnik ali na banki, ali v lekarni, ali na pošti, ali v trgovini. Dežnik je šel iskat na vsa mesta, kjer se je tega dne zadrževal. Takoj, ko ga najde, se vrne domov. Koliko različnih profesorjevih obhodov obstaja?
3. Morsova abeceda je način kodiranja s pomočjo pik in črtic, kjer so znaki lahko različnih dolžin. Vsaj kolikšna mora biti dolžina niza, da lahko zakodiramo 25 črk in 10 števk?
4. V razredu je 24 fantov. Vsak pozna natanko 3 dekleta. Vsako dekle pozna natanko 6 fantov. Koliko deklet je v razredu?
5. V ravnini je podanih 5 točk s celoštevilskimi koordinatami. Dokaži, da je razpolovišče vsaj ene izmed daljic med dvema točkama celoštevilska točka.
6. Tablico 5×5 zapolnimo z elementi $-1, 0, 1$. Dokaži, da kakorkoli zapolnimo tablico, sta vsaj dve izmed izračunanih vsot po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah vedno enaki.
7. Dokaži, da v poljubni množici sedmih celih števil, obstajata vsaj dve, katerih vsota ali razlika je deljiva z 10.
8. Naj bo $a_1, \ldots, a_n$ zaporedje celih števil. Dokaži, da vsebuje strnjeno podzaporedje, katerega vsota je deljiva z n.
9. Dokaži, da ima vsak seznam več kot n^2 različnih števil monoton podseznam dolžine vsaj $n + 1$.
10. Naj bo M množica desetih različnih dvomestnih naravnih števil. Dokaži, da obstajata različni podmnožici množice M, za kateri velja, da je vsota elementov prve podmnožice enaka vsoti elementov druge podmnožice.
11. Na koliko načinov lahko izmed $3n$ zaporednih naravnih števil izberemo urejeno trojico tako, da bo vsota teh treh števil deljiva s 3, če

(a) je lahko trojica sestavljena tudi iz enakih števil;

(b) vsako trojico sestavljajo sama različna števila.

12. Vzemimo poljubno ravninsko triangulacijo (vsako lice (tudi zunanje) je trikotnik). Zapiši povezavo med številom povezav in trikotnikov.

13. Koliko števil med 10000 in 100000 vsebuje le števke 3,5 in 7?

14. V enotskem enakostraničnem trikotniku imamo 4^k+1 različnih točk. Dokaži, da med njimi obstajata točki, ki sta med seboj oddaljeni za kvečjemu $\frac{1}{2^k}$.

15. Na tekmovanju mladih talentov se je zvrstilo 45 nastopajočih. Vsak je zapel 3 pesmi, vsaka pesem je bila 5 krat izvedena. Koliko različnih pesmi so poslušalci slišali?

16. Naj bo $(p_1, \ldots, p_n)$ poljubna permutacija množice $\mathbb{N}_n$, kjer je n liho število. Dokaži, da je produkt $(p_1 - 1)(p_2 - 2) \ldots (p_n - n)$ sodo število.

17. Točke ravnine $\mathbb{R}^2$ pobarvamo z dvema barvama. Dokaži, da vedno obstaja enako pobarvan par točk na razdalji 1.

18. Točke ravnine $\mathbb{R}^2$ pobarvamo s tremi barvami. Dokaži, da vedno obstaja enako pobarvan par točk na razdalji 1.

19. Naj bo n liho število in $A \subseteq \mathbb{Z}$ množica moči $\frac{n+3}{2}$. Dokaži, da množica A vsebuje tak par števil, da je bodisi njuna vsota bodisi razlika deljiva z n.

20. Pobarvajmo vsak kvadratek neskončnega karirastega lista papirja z eno od desetih barv. Dokaži, da obstajajo štirje enako pobarvani kvadratki, katerih središča so oglišča pravokotnika s stranicami, ki so vzporedne črtam karirastega papirja.

21. Študenta imata 4 bankovce po 5 EUR in 8 bankovcev po 10 EUR.

    (a) Na koliko načinov si jih lahko razdelita?

    (b) Na koliko načinov si jih lahko razdelita tako, da dobita oba enako število bankovcev?

22. Dokaži naslednji trditvi.

    (a) V vsaki množici $n + 1$ naravnih števil obstajata 2, katerih razlika je deljiva z n.

    (b) Za vsako naravno število n, obstaja naravno število m, katerega števke so 0 in 5 in je deljivo z n.

1.2 Urejene in neurejene izbire

n elementov na k mest

	Urejene izbire (variacije)	Neurejene izbire(kombinacije)
S ponavljanjem	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Brez ponavljanja	$n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

Permutacije:

n različnih elementov lahko postavimo v vrsto na $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ različnih načinov.

Naloge:

1. Koliko besed iz 8 črk lahko sestavimo v naši abecedi, če
   (a) ni omejitev?
   (b) vsaka beseda vsebuje natanko 3 različne samoglasnike in natanko 5 različnih soglasnikov?
   (c) vsaka beseda vsebuje 3 ali 4 ali 5 ne nujno različnih samoglasnikov?
2. V 1.a je 34 učencev, v 1.b 37 in v 1.c 32.
   (a) Na koliko načinov lahko izberemo dva predstavnika razredov?
   (b) Na koliko načinov lahko izberemo dva predstavnika razredov, če morata biti iz različnih razredov?
3. 10 turistov in 10 turistk si želi ogledati blejski otok. Na koliko načinov si ga lahko ogledajo s petimi enakimi čolni, če morata biti v vsakem čolnu 2 moška in 2 ženski?
4. Na koliko načinov lahko razporedimo n vitezov za okroglo neoznačeno mizo?
5. Na sestanku je n govornikov. Na koliko načinov se lahko razporedijo, če govornik A ne sme biti pred govornikom B?
6. Na koncertu bo nastopilo n, kjer $n \geq 2$, pevcev in m pevk. Na koliko načinov lahko sestavimo spored, če mora koncert začeti in končati pevec?

7. Na zabavi se je zbralo m fantov in m deklet, od katerih n deklet noče plesati. Na koliko načinov se lahko preostali združijo v plesne pare?

8. Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto n belih in k črnih kroglic, če mora biti med dvema črnima vsaj ena bela kroglica?

9. Naj bosta p in q naravni števili. Poišči število najkrajših poti v celoštevilski mreži od točke $(0, 0)$ do točke (p, q).

10. Danih je n različnih praštevil. Poišči število različnih deliteljev produkta teh praštevil.

11. m študentov je šlo na izlet. Nastanili so se v hotelu z m različnimi enopostelnimi sobami. Od teh ima le l sob balkon. i študentov mora imeti sobo z balkonom, j študentov pa ne sme imeti balkona. Preostalim študentom je vseeno v kateri sobi so. Na koliko načinov lahko študente razporedimo v sobe?

12. V jedilnici je avtomat, na katerem je možno dobiti dolgo kavo, kratko kavo, kavo z mlekom, kapučino, kakav in čaj. Na koliko načinov lahko izberemo množico 20 napitkov?

13. Iz rumenih, rdečih in belih rož bi radi napravili šopek 7 rož. Koliko različnih šopkov lahko napravimo? Kaj pa, če bi radi, da vsak šopek vsebuje vsaj en cvet vsake barve?

14. Na koliko načinov lahko izmed 12 fantov in 15 deklet sestavimo 4 pare za ples?

15. Babica ima na razpolago bombone, žvečilke in čokoladice. Največ ima bombonov najmanj pa čokoladic. Babica lahko sladkarije razdeli dvema vnukoma na 715 načinov. Koliko sladkarij vsake vrste ima na voljo?

16. Na voljo imamo 7 akcijskih filmov, 5 komedij in 6 dram. Maša si bo ogledala vseh 18 filmov. Na koliko načinov si jih lahko ogleda, če

    (a) si filme iste zvrsti ogleda enega za drugim?

    (b) dveh komedij ne pogleda skupaj?

17. Na koliko načinov lahko 5 enakih kroglic pobarvamo s 3 različnimi barvami, če moramo pobarvati vse kroglice in lahko tudi vse kroglice pobarvamo z isto barvo?

18. Na banki čaka 7 ljudi. Na koliko načinov se lahko razporedijo v vrsto, če:

(a) ni nobenih omejitev,

(b) mora Špela stati neposredno za Juretom,

(c) mora Špela stati za Juretom, vendar ne nujno neposredno za njim?

1.3 Binomski in multinomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}$$

Za $1 \leq k \leq n+1$ velja:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Vandermonde-jeva identiteta:
Naj bodo m, n in r taka naravna števila, da je $r < m, n$. Potem velja:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

Binomski izrek:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Naj bo M multimnožica s k različnimi elementi, ki se ponavljajo $n_1, \ldots, n_k$-krat, kjer je $n_1 + \ldots + n_k = |M| = n$. Tedaj je število permutacij M enako

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Multinomski izrek:

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_k)^n = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

Naloge:

1. Na koliko načinov lahko razdelimo karte za tarok med
   (a) 4 igralce?
   (b) 3 igralce?
2. Na koliko načinov lahko razvrstimo v vrsto 5 rdečih, 3 zelene in 4 modre kroglice?
3. Naj bo $a = 62774277$. Koliko 8 oziroma 5 mestnih števil lahko sestavimo iz števk števila a?
4. V razvoju multinoma $(4x_1-3x_2-2x_3)^{13}$ poišči koeficient pred členom $x_1^3x_2x_3^9$.
5. V razvoju $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^8$ poišči koeficient pred $x_1^2x_2x_4^3x_5^2$.
6. Poišči koeficient pred x^2 v polinomu $(1-4x)^6(1+3x)^8$.
7. Poišči koeficient pred x^{10}, x^{24}, x^{28} v polinomu $(1+2x^6-x^8)^{20}$.
8. Izračunaj vrednost $\displaystyle\sum_{\substack{n_i\geq 0 \\ n_1+\ldots+n_k=n \\ 1\leq i\leq k}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$.
9. Izračunaj vrednost izraza $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$.
10. Na koliko načinov lahko razvrstimo 30 učencev v 3 enakoštevilčne skupine, če
    (a) prva sadi rože, druga kosi travo, tretja reže veje?
    (b) vse tri kosijo travo?
11. Dokaži identiteto: $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.
12. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.
13. Osem moških se je odločilo, da bodo ustanovili oktet. Zastopani glasovi so bas, prvi tenor in drugi tenor. Na koliko načinov lahko sestavijo oktet, če vsak izmed pevcev lahko poje katerikoli glas in oktet sestavljajo
    (a) štirje basi, dva prva tenorja in dva druga tenorja?
    (b) vsaj en bas, vsaj en prvi tenor in vsaj en drugi tenor?

14. Na koliko načinov lahko pride kralj iz spodnjega levega kota v zgornji desni kot šahovnice, če mora biti pri vsakem premiku bliže cilju?

15. Tlakovali bi radi 9m dolgo in 1m široko pot. Na razpolago imamo 4 bele, 3 rumene, 1 zeleno in 1 modro ploščo velikosti $1m^2$.

    (a) Na koliko načinov lahko tlakujemo pot?

    (b) Na koliko načinov lahko tlakujemo pot, če mora na začetku in na koncu biti plošča iste barve?

    (c) Na koliko načinov bi lahko s temi ploščami tlakovali pot dolžine 5m?

16. Dokaži: $\binom{n+k}{2} + \binom{n+k+1}{2}$ je popoln kvadrat;

1.4 Pravilo vključitev in izključitev

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Naj bodo $A_1, \dots A_n$ končne množice. Tedaj je

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots \pm \alpha_n$$

kjer je α_i vsota moči vseh možnih presekov po i množic.

- Deranžacija je premutacija brez negibnih točk.
- Eulerjeva funkcija $\Phi(n)$: je število števil med 1 in n, ki so tuja z n.

Naloge:

1. Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 3, niso pa deljiva z 2,5,7?
2. Na koliko načinov lahko razporedimo črke J,A,Z,T,I,M v takšno zaporedje, da ne nastopata niti podzaporedje JAZ niti podzaporedje TI?
3. Na koliko načinov lahko n različnih oblačil pospravimo v 5 različnih omar tako, da nobena omara ne bo ostala prazna?
4. Po Sahari gre karavana sestavljena iz n kamel. Na koliko načinov se lahko po počitku v oazi razporedijo tako, da nobena kamela ne hodi za isto kamelo, kot je hodila pred postankom?
5. Pri vhodu v restavracijo je vsak izmed n ljudi pustil dežnik in klobuk. Ko zapustijo restavracijo vsak na slepo vzame dežnik in klobuk. Na koliko načinov se lahko zgodi, da nihče ne vzame obeh svojih stvari?
6. Nekje v pokrajini so zgradili 5 novih naselij. Inžinerju so naročili naj zgradi sistem dvosmernih cest tako, da nobeno naselje ne bo izolirano. Na koliko načinov lahko to naredi?
7. Naj bo $0 \leq m \leq n$. Dokaži, da je število vseh permutacij množice $\mathbb{N}_n$, ki imajo natanko m fiksnih točk enako $\frac{n!}{m!} \sum_{j=0}^{n-m} \frac{(-1)^j}{j!}$.
8. S petimi avtomobili gre na izlet 8 ljudi. V vsakem avtomobilu se lahko pelje do 8 ljudi. Na koliko načinov lahko to izvedejo, če imajo vsi vozniški izpit in hočejo potovati z vsemi petimi avtomobili?

9. Določi število permutacij iz S_8, v katerih se nobeno liho število ne preslika vase.

10. Na koliko načinov lahko pet Američanov, štiri Brazilce in tri Ciperčane postavimo v vrsto, tako da nobena nacionalnost ne tvori enega bloka? (Vsi Američani ne smejo stati skupaj. Enako velja za Brazilce in Ciperčane.)

11. Za pravokotno mizo z $2n$ oštevilčenimi stoli je zajtrkovalo $2n$ oseb. Na A strani mize so stoli oštevilčeni s številkami od 1 do n, na nasprotni B strani mize pa so stoli s številkami od $n + 1$ do $2n$. Istih $2n$ oseb želi za isto mizo tudi večerjati. Na koliko načinov se lahko posedejo tako, da nobena oseba, ki je pri zajtrku sedela na strani A, ne sedi niti na istem niti na nasprotnem stolu, kot je sedela pri zajtrku?

12. Podanih je n vozlišč $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Na koliko načinov lahko pare vozlišč povežemo med sabo, da bo stopnja vsakega vozlišča vsaj ena?

13. Koliko je vseh surjektivnih funkcij $f : A \longrightarrow B$, kjer je $|A| = n$ in $|B| = m$?

14. Na koliko načinov lahko 10 poročenih parov posedemo za okroglo mizo tako, da nobena žena ne sedi poleg svojega moža?

1.5 Stirlingova števila 1. in 2. vrste

Stirlingova števila 1. vrste

Stirlingovo število 1. vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ je število permutacij iz S_n, ki jih lahko zapišemo kot produkt k disjunktnih ciklov.

Za vsak $1 < k < n$ velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)$$

Stirlingova števila 2. vrste

Stirlingovo število 2. vrste $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ je število razbitij množice z n različnimi elementi na k nepraznih razredov.

Za vsak $1 < k < n$ velja:

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (x)_k = x^n$$

Število surjekcij iz n-množice v k-množico je enako $k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$.

Naloge:

1. Izračunaj Stirlingovi števili prve vrste $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$.

2. V polinomu $p(x) = x(x+1)\dots(x+7)$ določi koeficiente pred x^6 in x^3.

3. Podan je polinom $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)^2$. Izrazi koeficiente polinoma p s Stirlingovimi števili 1. vrste.

4. Dokaži: $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} x^k = x^{\overline{n}}$.

5. Dokaži, da za vsak $n \geq m$ velja:
$$\begin{bmatrix}n+1\\m+1\end{bmatrix} = \sum_{k=m}^{n} \begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix} \frac{n!}{k!}$$

6. Na koliko načinov lahko 8 vitezov posedemo za 3 okrogle mize, tako da nobena miza ne bo prazna?

7. Na koliko načinov lahko množico s štirimi elementi razbijemo na k napraznih razredov, kjer je $1 \leq k \leq 4$?

8. Dokaži, da za vsak $n \geq 2$ velja:
$$\begin{Bmatrix}n\\2\end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1$$

9. Pokaži, da za vsak $n \geq 3$ velja
$$\begin{Bmatrix}n\\3\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

10. Pokaži, da za $n \geq m$ velja:
$$\begin{Bmatrix}n+1\\m+1\end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}.$$

11. Dokaži, da za $n \geq m,\ n, m \in \mathbb{N}$ velja:
$$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m!}.$$

12. Dokaži, da za vsak $n \geq k,\ n, k \in \mathbb{N}$ velja:
$$k! \left\{ {n \atop k} \right\} = k^n - \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ {n \atop j} \right\} k^{\underline{j}}.$$

13. V nekem mestu imamo p avtošol. Vsak izmed $p+n$ prijateljev se vpiše v eno avtošolo. Na koliko načinov lahko to naredijo, če je v vsako avtošolo vpisan vsaj eden izmed njih in sta p in n poljubni naravni števili?

1.6 Porazdelitve

n elementov razporejamo v k predalov, ki so lahko prazni ali pa ne:

elementi označeni	predali označeni	predali prazni	porazdelitev
DA	DA	DA	k^n
DA	DA	NE	$k!\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$
DA	NE	DA	$\sum_{i=1}^{k}\left\{\begin{matrix} n \\ i \end{matrix}\right\}$
DA	NE	NE	$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$
NE	DA	DA	$\binom{n+k-1}{n}$
NE	DA	NE	$\binom{n-1}{k-1}$
NE	NE	DA	$\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$
NE	NE	NE	$p_k(n)$

$p_k(n)$ predstavlja število različnih zapisov števila n kot vsota k neničelnih sumandov.

Velja:

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k)$$

$$p_k(n) = p(n; \text{največji sumand je } k)$$

Naloge:

1. Na koliko načinov lahko zapišemo 8 kot vsoto štirih sumandov?
2. Izračunaj $p_3(9)$ in poišči tiste particije števila 9, v katerih je 3 največji sumand.
3. Dokaži, da je število particij števila n, kjer je število sumandov kvečjemu m ($m \leq n$), enako številu particij števila $n + \frac{m(m+1)}{2}$ z m različnimi sumandi.
4. Poišči vse sebi-konjugirane particije števila 18.
5. 10 žog želimo razdeliti v rdeč, moder in zelen zaboj. Na koliko načinov lahko to naredimo, če
   (a) nimamo omejitev?
   (b) mora biti v rdečem zaboju vsaj 5 žog?
6. Ploskve igralne kocke barvamo s šestimi barvami. Na koliko načinov jih lahko pobarvamo, če
   (a) poljubno barvamo?
   (b) vsako ploskev pobarvamo drugače?
   (c) uporabimo 3 barve?
7. Koliko rešitev ima enačba $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n$ v $\mathbb{N}$, če
   (a) upoštevamo vrstni red rešitev?
   (b) ne upoštevamo vrstnega reda rešitev?
8. Koliko različnih sumandov je v razvoju izraza $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$?
9. Dokaži, da velja $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$
10. Imamo 8 enakih belih, 10 enakih rdečih in 12 enakih črnih kroglic. Na koliko načinov
    (a) jih lahko postavimo v vrsto, če morajo kroglice iste barve stati skupaj?
    (b) lahko vseh 30 kroglic razdelimo v rumeno in zeleno škatlo, če nobena škatla ne sme biti prazna?
    (c) lahko kroglice postavimo v vrsto, če dve beli nikoli ne stojita skupaj, rdeči pa vedno sledi črna kroglica?

11. Na avtobus, ki ima predvidene postanke na desetih postajah, vstopi 6 ljudi. Do vključno zadnje postaje morajo vsi potniki izstopiti, prav tako pa na vmesnih postajah nihče več ne vstopi. Na koliko načinov lahko potniki izstopijo, če:
    (a) nobena dva ne izstopita na isti postaji?
    (b) izstopajo v parih?
    (c) izstopijo na natanko dveh postajah?
12. Na koliko načinov lahko trem otrokom razdelimo 7 čokoladnih bonbonov, če so le ti med seboj:
    (a) enaki in vsak otrok dobi vsaj en bonbon?
    (b) enaki in lahko kdo ostane tudi brez bonbona?
    (c) različni in vsak otrok dobi vsaj en bonbon?

1.7 Rekurzija

$$a_n = f(a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

Zvezi

$$a_{n+k} = A_1 a_{n+k-1} + \ldots + A_k a_n$$

pravimo homogena k-člena linearna rekurzija.

Reševanje:

Rekurziji priredimo karakteristično enačbo

$$x^k = A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k$$

Naj bodo $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ koreni te enačbe. Potem velja:

1. Če so koreni vsi različni, potem je $a_n = K_1 \alpha_1^n + \ldots + K_k \alpha_k^n$ za neke K_i
2. Če je α_i k-kratni koren, potem je $a_n = (K_1 + K_2 n + \ldots + K_m n^{m-1})\, \alpha_i^n + \ldots$

Zvezi

$$a_{n+k} = A_1 a_{n+k-1} + \ldots + A_k a_n + f(n)$$

pravimo nehomogena rekurzija.

Reševanje:

$$\textbf{splošna rešitev} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

Partikularna rešitev:

1. Če je $f(n)$ polinom stopnje m, je tudi nastavek polinom stopnje m z nedoločenimi koeficienti.
2. Če je $f(n) = p(n)\alpha^n$, kjer je p polinom stopnje r in je α s-kratna ničla karakteristične enačbe pripadajoče homogene rekurzije, potem je nastavek oblike $n^s P(n)\alpha^n$, kjer je P polinom stopnje r z nedoločenimi koeficienti.
3. Če je $f(n) = \cos(n\varphi)$, potem je nastavek $B\sin(n\varphi) + C\cos(n\varphi)$.
4. Če je $f(n)$ linearna kombinacija zgornjih funkcij, je tudi nastavek linearna kombinacija ustreznih nastavkov.

Naloge:

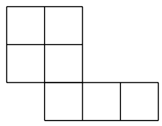
1. Poišči splošni člen Fibonaccijevega zaporedja.
2. Poišči splošni člen rekurzivno podanega zaporedja:
   (a) $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$, kjer je $n \geq 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$;
   (b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, kjer je $n \geq 3$, $a_i = i$ za $i = 0, 1, 2$;
   (c) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 4a_n = 0$, kjer je $a_0 = 2$, $a_1 = -2$ in $a_2 = 6$;
   (d) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 8a_n$, kjer je $a_0 = 2$ in $a_1 = 10$;
   (e) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$, kjer je $a_0 = 2$, $a_1 = 4$.
3. Poišči rekurzivni zapis zaporedja, katerega splošni člen je
   (a) $a_n = (2n-1)3^n + 5 \cdot 2^n$;
   (b) $a_n = 2 \cdot 5^n + 7$;
   (c) $a_n = \left(\frac{4}{25} + \frac{24}{5}n\right) \cdot 2^{-n} - \frac{4}{25} \cdot 3^n$;
   (d) $a_n = n^2$.
4. Poišči in reši rekurzijo za število vseh besed dolžine n sestavljenih iz $0, 1, 2$, kjer so prepovedane zaporedne ničle.
5. Poišči splošno rešitev nehomogene rekurzije:
   (a) $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 2^n$;
   (b) $3a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n = 3^n$;
   (c) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 + 6n - 2n^2$, kjer je $a_0 = 2$ in $a_1 = 4$;
   (d) $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 6 + 2^{n+1}$, kjer je $a_0 = -3$ in $a_1 = -5$
   (e) $a_n = 3a_{n-1} + n^2 - 3$, kjer je $a_0 = 1$;
   (f) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 5 - 3n + 3^n$, kjer je $a_0 = 2$ in $a_1 = 1$;
   (g) $a_n - 4a_{n-1} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$, kjer je $a_1 = 0$;
   (h) $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, kjer je $a_0 = 1$ in $a_1 = -1$;
   (i) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n = 2n - 3\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$;
6. Koliko besed dolžine n nad abecedo $\{a, b, c\}$, ki ne vsebujejo podniza cc in se začnejo s c, obstaja?
7. Zapiši rekurzijo za število nizov dolžine n nad abecedo $\{0, 1, 2\}$, ki ne vsebujejo podniza 01.

8. Mateja se vzpenja na vrh stopnišča z n stopnicami. Na koliko načinov lahko pride do vrha, če na vsakem koraku stopi bodisi eno, bodisi dve stopnici više?

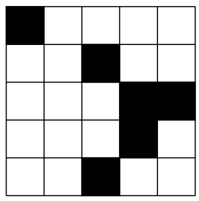
1.8 Trdnjavski polinomi

Naloge:

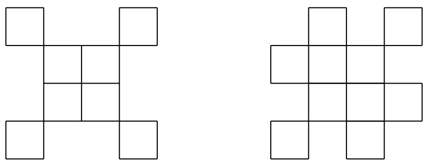
1. Določi trdnjavski polinom za desko na sliki.



2. Na koliko načinov lahko na spodnjo desko postavimo 5 nenapadajočih se trdnjav?



3. Določi trdnjavski polinom za deski na sliki:



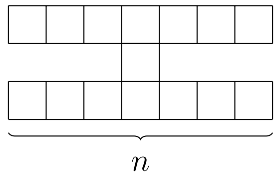
4. 7 ljudi bi si v videoteki rado sposodilo film *Skyfall*, vsak za natanko en dan. Na koliko načinov si lahko v času enega tedna izposodijo film če Ana in Bojan načrtujeta izlet v soboto in nedeljo, Cene je zadržan v ponedeljek, Dejan gre v petek v kino, Eva obiskuje plesne vaje v petek in soboto, Franja ni v petek, ker igra tarok s prijatelji, Gašper pa ima čas vsak dan?

5. Poišči desko, katere trdnjavski polinom je $1 + 5x + 8x^2 + 5x^3 + x^4$.

6. Koliko je nenapadajočih razvrstitev dveh trdnjav na desko oblike

7. Ali je polinom $p(x) = 1 + 8x + 18x^2 + 19x^3 + 16x^4 + 9x^5 + x^6$ trdnjavski polinom?

8. Naj bo $R_n(x)$ trdnjavski polinom polne deske $n \times n$, $S_n(x)$ pa trdnjavski polinom polne deske $(n-1) \times n$. Izrazi R_n z R_{n-1} in S_n.



9. S pomočjo trdnjavskega polinoma zapiši število deranžacij množice $[n]$.

10. Mordro in rumeno kocko vržemo 6-krat. Vemo, da se niso pojavili pari $(1,6)$, $(2,1)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(5,1)$, $(5,5)$ in $(6,6)$. Kolikšna je verjetnost, da je na modri kocki padlo vseh 6 različnih vrednosti, prav tako pa tudi na rumeni kocki?