Intervali zaupanja

Točkovne ocene

Spomnimo se:

- Cenilka populacijskega parametra q statistične spremenljivke X je statistika, ki iz vrednosti X na vzorcu oceni vrednost populacijskega parametra q.
- Če vrednost populacijskega parametra q ocenimo z eno samo vzorčno vrednostjo tega parametra, pravimo taki oceni točkovna ocena.

- Točkovne ocene so nezanesljive!
- Zato: Določimo interval $[L, D]$ (interval zaupanja), v katerem bo z neko stopnjo zaupanja ležal parameter q.

Zgled - vzorčno povprečje

- Imamo dano populacijsko povprečje $\mu = 10$ in porazdelitev vzorčnega povprečja $\overline{X} \approx N(10, 2)$.
- Izberemo vzorec.
- Kakšno je vzorčno povprečje $\bar{x}$? Je enako 8, 9, 10, 11, 12?
  - $\bar{x} \in [8, 12]$ z verjetnostjo 68.3%,
  - $\bar{x} \in [6, 14]$ z verjetnostjo 95.4%,
  - $\bar{x} \in [4, 16]$ z verjetnostjo 99.7%.
  - Verjetnost – iz tabel za normalno porazdelitev!

Zgled - populacijsko povprečje

- Obratni problem:

  Imamo dano vzorčno povprečje $\bar{x} = 10$.
- Z njim **ocenimo** populacijsko povprečje μ.
- Vzorčno povprečje je najučinkovitejša nepristranska cenilka za populacijsko povprečje.
- Če bi bil μ enak $\bar{x} = 10$ in bi bila standardna napaka cenilke enaka 2, potem bi (zaradi $\overline{X} \approx N(\mu, SE(\overline{X}))$):
  - povprečja 68.3% vzorcev ležala na intervalu $[8, 12]$,
  - povprečja 95.4% vzorcev ležala na intervalu $[6, 14]$,
  - itd.
- Stopnja zaupanja – imamo veliko zaupanje, da je populacijsko povprečje na danem intervalu.

Interval zaupanja – definicija

- S cenilko C in vzorcem $(X_1, \ldots, X_n)$ ocenjujemo populacijski parameter q spremenljivke X.
- Interval zaupanja s stopnjo zaupanja $1 - \alpha \in (0, 1)$ je par statistik $[L, D]$, da:
  - $L = L(X_1, \ldots, X_n)$,
  - $D = D(X_1, \ldots, X_n)$,
  - z verjetnostjo $1 - \alpha$ velja $L \leq q \leq D$ oz. $P(L \leq q \leq D) \geq 1 - \alpha$.
- Tipično: $\alpha = 0.05 = 5\%$, $\alpha = 0.01 = 1\%$, $\alpha = 0.001 = 0.1\%$.
- α je stopnja značilnosti oz. stopnja tveganja.

Intervali zaupanja – razlaga

- Naj bodo $x_1, \ldots, x_n$ konkretne vrednosti na vzorcu, ki dajo za parameter q interval zaupanja $[l, d]$ s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$.

  Interval zaupanja je dobljen po metodi, ki v deležu $1 - \alpha$ primerov vzorčenja zagotavlja, da bo $q \in [l, d]$.

  V α primerih to ne bo nujno veljalo - tveganje za napačen rezultat.
- Konkretno: Recimo, da je $1 - \alpha = 0.95 = 95\%$.
  - Na 100 vzorcih izračunamo interval zaupanja za q.
  - Približno 95 krat bo parameter q ležal na izračunanem intervalu in približno 5 krat ne bo.

Računanje intervalov zaupanja

- Intervale zaupanja izračunamo s pomočjo porazdelitev vzorčnih cenilk.
- Ogledali si bomo intervale zaupanja za:
  - populacijsko povprečje,
  - populacijski delež,
  - disperzijo in standardni odklon,
  - razliko dveh povprečij pri neodvisnih vzorcih.

Populacijsko povprečje pri velikih vzorcih

- Velik vzorec:
  - $n \geq 30$ za (skoraj) normalne porazdelitve,
  - $n \geq 60$ za porazdelitve, ki so daleč od normalne.
- X poljubna spremenljivka s povprečjem μ in standardnim odklonom σ.

  Vemo:
  - vzorčno povprečje: $\overline{X}$,
  - pričakovana vrednost: $E(\overline{X}) = \mu$,
  - standardna napaka: $\sigma(\overline{X}) = SE(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $(= \frac{S}{\sqrt{n}})$.
  - centralni limitni izrek: $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{S}{\sqrt{n}})$.

Populacijsko povprečje pri velikih vzorcih

- Torej velja: $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \approx N(0,1)$.
  O porazdelitvi $N(0,1)$ pa vemo vse! Tabela A.
- Določiti želimo interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$.
  Iz $P(|Z| \leq z_\alpha) = 1-\alpha$ dobimo:
  $P(\overline{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$.
  Interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$ je:
  $[\overline{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}] = [\overline{X} - z_\alpha SE(\overline{X}), \overline{X} + z_\alpha SE(\overline{X})]$.

1. Primer: Določi interval zaupanja za populacijsko povprečje porodne teže novorojenčka v gramih s stopnjo zaupanja $1-\alpha = 0.95$, če je $n = 187$, $\overline{X} = 2946$ in $S = 698$.
   Odgovor: $[2846, 3046]$.

Populacijsko povprečje pri malih vzorcih

- Problem: porazdelitev $\overline{X}$ ni "dovolj" normalna.
- Predpostavka: nadaljujemo lahko le, če je X na populaciji normalno porazdeljena.
  - Naj bo torej $X \sim N(\mu, \sigma)$ in n velikost vzorca.
  - Potem je $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim S(n-1)$.
  - Ponovimo: $S(n-1)$ je Studentova porazdelitev z $n-1$ prostostnimi stopnjami.
- Interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$:
  Iz $P(|T| \leq t_\alpha) = 1-\alpha$ dobimo, da je iskani interval enak
  $[\overline{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}] = [\overline{X} - t_\alpha SE(\overline{X}), \overline{X} + t_\alpha SE(\overline{X})]$.

2. Primer: Določi interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha = 0.95$, če je $n = 15$, $\overline{X} = 100$ in $S = 19$.
   Odgovor: $[89.5, 110.5]$.

Število prostostnih stopenj

- Število prostostnih stopenj:
  - Vzorec kot slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$.
  - Vrednosti slučajnih spremenljivk X_i so poljubne – n prostostnih stopenj vzorca.
  - Predpostavka:
    Recimo, da poznamo vzorčno povprečje: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
    Imamo eno vez med vrednostmi: $n-1$ prostostnih stopenj.
    Eno vrednost lahko izračunamo iz povprečja, npr.
    $x_n = n\overline{x} - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$.

Populacijski delež

Spomnimo se:

- Populacijski delež p ocenjujemo z vzorčnim deležem: $\overline{p} = \frac{k}{n}$.
- Cenilka za delež statističnih enot z določeno lastnostjo oz. za verjetnost nekega dogodka A ($P(A) = p$) na populaciji je vzorčno povprečje indikatorskih spremenljivk:
  $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \sim I_A$.
  Ista cenilka kot za populacijsko povprečje!
- Vemo še: $E(\overline{p}) = p$ in $SE(\overline{p}) = \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$.
- Za velike n po CLI velja:
  $\overline{p} \approx N(p, SE(\overline{p}))$ in $\frac{\overline{p}-p}{SE(\overline{p})} \approx N(0,1)$.

Interval zaupanja za populacijski delež p

- Ker je I_A daleč od normalne porazdelitve, za določitev intervala zaupanja za p, potrebujemo vzorec velikosti $n \geq 60$.
- Velja: $Z = \frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}}\sqrt{n} = \frac{\overline{p}-p}{SE(\overline{p})} \approx N(0,1)$.
- Interval zaupanja za p s stopnjo zaupanja $1-\alpha$:
  $[\overline{p} - z_\alpha SE(\overline{p}), \overline{p} + z_\alpha SE(\overline{p})]$.

3. Primer: Med 100 naključno izbranimi dijaki je bilo 25 kadilcev. Določi interval zaupanja za delež kadilcev med dijaki s stopnjo zaupanja $1-\alpha = 0.95$.
   Odgovor: $[0.166, 0.334]$.

Disperzija in standardni odklon pri normalni porazdelitvi

- Predpostavimo, da je X normalno porazdeljena, $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Imejmo vzorec velikosti n in $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ cenilko za disperzijo (vzorčna disperzija).
- Izkaže se: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
  $\chi^2(n-1)$ – hi kvadrat porazdelitev z $n-1$ prostostnimi stopnjami. Tabela C.

  Podobno kot prej, želimo $P(\chi_1^2 \leq \chi^2(n-1) \leq \chi_2^2) = 1-\alpha$.
  Porazdelitev ni simetrična. Želimo:
  - $P(\chi^2(n-1) \geq \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}$.
  - $P(\chi^2(n-1) \geq \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Disperzija in standardni odklon pri normalni porazdelitvi

- Interval zaupanja za σ^2 s stopnjo zaupanja $1-\alpha$:
  $$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right].$$
- Interval zaupanja za σ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$:
  $$\left[\frac{\sqrt{n-1}\,S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n-1}\,S}{\chi_1}\right].$$

4. Primer: Določi interval zaupanja s stopnjo zaupanja $1-\alpha = 0.95$ za disperzijo in standardni odklon naključne spremenljivke $X \sim N(\mu, \sigma)$, če je $n = 15$ in $S^2 = 25$.
   Odgovor: $\sigma^2 \in [13.4, 62.2]$ in $\sigma \in [3.7, 7.9]$.

Standardni odklon pri poljubni porazdelitvi

- Recimo, da X ni normalno porazdeljena.
- Imejmo velik vzorec velikosti n in $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ cenilko za disperzijo.
- Izkaže se: $Z = \frac{S}{\sigma}\sqrt{2(n-1)} - \sqrt{2n-3} \approx N(0,1)$.
- Iz $P(|Z| \leq z_\alpha) = 1-\alpha$ dobimo, da je interval zaupanja za σ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$:
  $$\left[\frac{\sqrt{2(n-1)}\,S}{\sqrt{2n-3}+z_\alpha}, \frac{\sqrt{2(n-1)}\,S}{\sqrt{2n-3}-z_\alpha}\right].$$

Razlika dveh povprečij pri neodvisnih vzorcih

- Pogosta uporaba.
- X, Y – merjeni količini, μ, ν – populacijski povprečji.
- $(X_1, \ldots, X_m)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ – dva velika neodvisna vzorca, $m, n \geq 30$.
- X in Y porazdeljeni poljubno.
- $\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$ je cenilka za μ.
- $\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ je cenilka za ν.
- Ocenjujemo: $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu - \nu$.
- $\overline{X} - \overline{Y}$ je cenilka za razliko.

Razlika dveh povprečij pri neodvisnih vzorcih

Standardna napaka cenilke $\overline{X} - \overline{Y}$:

Spomnimo se:

- Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Potem je $D(aX) = a^2 D(X)$.
- $D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Zato je: $D(\overline{X} - \overline{Y}) = \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}$.

Ocena standardne napake cenilke $\overline{X} - \overline{Y}$:

$$SE(\overline{X} - \overline{Y}) = \sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}} = \sqrt{SE(\overline{X})^2 + SE(\overline{Y})^2}.$$

- $S_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2$ je cenilka za σ_x^2.
- $S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$ je cenilka za σ_y^2.

Razlika dveh povprečij pri neodvisnih vzorcih

- Izkaže se: $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu - \nu)}{\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}} \approx N(0, 1)$.
- Če izberemo z_α tako, da je $P(|Z| \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$, je interval zaupanja za $\mu - \nu$ s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$:

  $\left[\overline{X} - \overline{Y} - z_\alpha SE(\overline{X} - \overline{Y}), \overline{X} - \overline{Y} + z_\alpha SE(\overline{X} - \overline{Y})\right]$.

5. Primer: X meri porodno težo novorojenčkov v gramih pri materah nekadilkah (vzorec velikosti m), Y pa pri kadilkah (vzorec velikosti n). Določi interval zaupanja s stopnjo zaupanja $1 - \alpha = 0.95$ za razliko v povprečni porodni teži novorojenčkov med materami nekadilkami in kadilkami, če je $m = 120$, $n = 70$, $\overline{X} = 3000$, $\overline{Y} = 2800$, $S_x = 700$ in $S_y = 650$.

   Odgovor: $[2.8, 397.2]$.

Razlika dveh povprečij pri neodvisnih vzorcih

- X, Y – merjeni količini, μ, ν – populacijski povprečji.
- $(X_1, \ldots, X_m)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ – dva majhna neodvisna vzorca, $m, n < 30$.
- Dodatne predpostavke:
  - $X \sim N(\mu, \sigma)$ in $Y \sim N(\nu, \sigma)$.
- Izkaže se:

  $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu - \nu)}{S} \sqrt{\dfrac{nm}{n + m}} \sim S(m + n - 2)$, kjer je:
  - $S^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}$ in
  - $S(m + n - 2)$ Studentova porazdelitev z $m + n - 2$ prostostnimi stopnjami.
- Če izberemo t_α tako, da je $P(|T| \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$, je interval zaupanja za $\mu - \nu$ enak:

  $\left[\overline{X} - \overline{Y} - t_\alpha S \sqrt{\frac{n+m}{nm}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_\alpha S \sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right]$.