

**Izpit pri predmetu Analiza I**  
**16. 6. 2020**

---

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. [25] Če obstajata, izračunaj limiti

(a) [10]  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{1}{3-3^x}}$ ,

(b) [15]  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{x+1}{\sin x} - \sqrt[4]{\frac{x^4+1}{\sin^4 x}} \right)$ .

V primeru, da katera od limit ne obstaja, to tudi dokaži.

2. [25] S pomočjo prvega in drugega odvoda čimbolj natančno skiciraj graf funkcije  $f$ , ki je podana s predpisom

$$f(x) = (2 - x)e^{-\frac{1}{x}}.$$

3. [25] Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dvakrat odvedljiva funkcija in naj velja  $f(a) = f(b) = 0$ . Naj še obstaja točka  $c \in (a, b)$ , za katero velja  $f(c) < 0$ . Dokaži, da obstaja vsaj ena točka  $x_0 \in [a, b]$ , za katero velja  $f''(x_0) > 0$ .
4. [25] Poišči vse  $a \in \mathbb{R}$  in  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , za katere vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^a \cdot (\ln b^2)^n$$

pogojno konvergira.

**Izpit pri predmetu Analiza I**  
**16. 6. 2020**

---

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. [25] Poišči vse  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ , za katere je  $\left(\frac{iz+1}{z+i}\right)^2$  realno število. Rešitev tudi predstavi v kompleksni ravnini.
2. [25] Dokaži, da je zaporedje  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je podano rekurzivno

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N},$$

konvergentno. Izračunajte tudi njegovo limito.

3. [25] Če obstajata, izračunaj limiti

(a) [10]  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{1}{3-3^x}}$ ,

(b) [15]  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{x+1}{\sin x} - \sqrt[4]{\frac{x^4+1}{\sin^4 x}} \right)$ .

V primeru, da katera od limit ne obstaja, to tudi dokaži.

4. [25] Poišči vse  $a \in \mathbb{R}$  in  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , za katere vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^a \cdot (\ln b^2)^n$$

pogojno konvergira.