

**Izpit pri predmetu Analiza I**  
**17. 9. 2020**

---

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. [25] Za katere realne vrednosti parametra  $x$ ,  $x \neq \frac{4}{3}$ , vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(3x-4)^n}$$

konvergira? Za vsak tak  $x$  izračunaj tudi vsoto vrste.

2. **[25]** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, za katero velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  in  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , kjer sta  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dokaži, da je  $f$  omejena funkcija.

3. [25] Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b$ . Dokaži

$$\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} \leq \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2+1}}{a + \sqrt{a^2+1}} \right) \leq \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Pri dokazu lahko uporabite Lagrangeov izrek za funkcijo, ki je podana s predpisom  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ .

4. **[25]** S pomočjo prvega in drugega odvoda čimbolj natančno skiciraj graf funkcije  $f$ , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

**Izpit pri predmetu Analiza I**  
**17. 9. 2020**

---

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. **[25]** Naj bo

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, |z| < 1\}.$$

Dokaži, da za vsak  $z \in M$  obstaja  $w \in M$ , da je

$$z = \frac{1 - w}{1 + w}.$$

2. [25] Izračunaj limiti zaporedij  $a$  in  $b$ , kjer je

(a)  $a_n = n(n + \sqrt[3]{4n - n^3})$ , za vsak  $n \in \mathbb{N}$ ,

(b)  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{b_n + 1}$ , za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

3. [25] Za katere realne vrednosti parametra  $x$ ,  $x \neq \frac{4}{3}$ , vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(3x-4)^n}$$

konvergira? Za vsak tak  $x$  izračunaj tudi vsoto vrste.

4. **[25]** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, za katero velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  in  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , kjer sta  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dokaži, da je  $f$  omejena funkcija.