

**Izpit pri predmetu Analiza I**  
**30. 8. 2019**

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. [25] Naj bosta  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , za kateri velja  $z_1 \neq z_2$  in  $|z_1| = |z_2|$ . Dokaži, da je

$$|z_1 + z_2| < 2|z_1|.$$

2. [25] Ali je zaporedje  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je podano rekurzivno

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N},$$

konvergentno? V primeru, če je dano zaporedje konvergentno, zapiši še njegovo limito.

3. [25] Dokaži ali ovrzi naslednji trditvi.

(a) [10] Za vsako vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  velja: če vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pogojno konvergira, tedaj  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2}$  konvergira.

(b) [15] Vsota vrste  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2 - 1)^2}$  je strogo manjša od  $\frac{5}{16}$ .

4. [25] Izračunaj naslednji limiti

(a) [10]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \ln(1 + 2x))}{e^{2x} - e^{-x}},$

(b) [15]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^3 + 1} + \frac{2 \cdot n}{n^3 + 2} + \dots + \frac{n \cdot n}{n^3 + n} \right).$

Nalogo reši brez uporabe odvoda.