

Izpit pri predmetu Analiza I
31. 8. 2020

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. [25] Ali konvergira katera od vrst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) + \ln(n+1)^2}{n^2 + 2n}?$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj njeno vsoto.

2. [25] Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja, da je slika vsakega odprtega intervala odprti interval. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve.

- (a) Funkcija f je injektivna.
- (b) Funkcija f je surjektivna.
- (c) Funkcija f je monotona.

3. [25] Določi vrednost parametra a , da bo funkcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) & ; \quad x \neq 0 \\ a & ; \quad x = 0, \end{cases}$$

zvezna. Ali je v tem primeru funkcija f tudi odvedljiva? Ali je tudi zvezno odvedljiva?

4. **[25]** V krogli z radijem R poišči tisti stožec, ki ima največji možni volumen. Volumen tega stožca tudi izračunaj.

Izpit pri predmetu Analiza I
31. 8. 2020

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji ter jih jasno in nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. [25] Ali sta množici

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid (2 - |z|)\sqrt{6 + |z| - |z|^2} \leq 0, \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$$

in

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 - \bar{z} = 0\}$$

disjunktni? Obe množici tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

2. **[25]** Dokaži, da je zaporedje $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podano rekurzivno

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + \frac{a_n}{2}, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N},$$

konvergentno. Izračunajte tudi njegovo limito.

3. [25] Ali konvergira katera od vrst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) + \ln(n+1)^2}{n^2 + 2n}?$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj njeno vsoto.

4. **[25]** Naj bo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija za katero je $f(0) = 2$. Dokaži, če velja

$$f(x-1) = f(x) \cdot (1 - f(x^2)) \quad \text{za vsak } x \in [0, 1],$$

tedaj je $[-1, 1] \subseteq f([-1, 1])$.