1. test pri predmetu Analiza I
25. 4. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[25]** Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Dana je možica

$$A_a = \left\{ \frac{1}{1+e^{ax}} \mid x \geq 0 \right\}.$$

   V odvisnosti od realnega parametra a, določi $\inf A_a$, $\min A_a$, $\sup A_a$ in $\max A_a$ v $\mathbb{R}$, če obstajajo.

2. **[25]** Dokaži, da na poljubnem odprtem intervalu obstaja
   (a) število oblike $b\sqrt[3]{3}$, kjer je $b \in \mathbb{Q}$;
   (b) število oblike $a + b\sqrt[3]{3}$, kjer je $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{Q}$.

3. **[25]** Naj bodo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, za katera velja $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ in $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Dokaži, da je

$$\left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 1.$$

4. **[25]** Reši spodnji nalogi.
   (a) Naj bo $\ell \in \mathbb{R}$ in naj bosta a in b zaporedji, za kateri velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ in

$$b_n = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

   Dokaži, da je tedaj $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell^2$.

   (b) Ali obstajata konvergentno zaporedje b in divergentno zaporedje a, tako da je

$$b_n = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}?$$