2. delni test pri predmetu Analiza I
7. 6. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta dva A4 lista s formulami in matematični priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[25]** Zaporedje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je podano rekurzivno
$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} \ \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$
Ali je zaporedje a Cauchyjevo?

2. **[25]** Poišči vsa realna števila x, za katera vrsta
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}}$$
konverigira. Ali obstaja tako realno število x, za katerega podana vrsta pogojno konvergira?

3. **[25]** Poišči tako funkcijo $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2+12x+8}-x-2}{\operatorname{ch}^2(5x)-1} & ; \quad x < 0, \\ g(x) & ; \quad 0 \leq x \leq 2, \\ (x-1)^{(\ln \frac{x}{2})^{-1}} & ; \quad x > 2, \end{cases}$$
zvezna. Nalogo reši brez uporabe odvoda.

4. **[25]** Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero velja $f(x) = f(\frac{x}{2})$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Poišči primer nekonstante funkcije, ki zadošča zgornjemu pogoju.
   (b) Dokaži: če je f zvezna v točki 0, tedaj je f konstantna funkcija.