

1. delni test pri predmetu Analiza II
22. 11. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[25]** Reši spodnji nalogi.

- (a) Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$. Nadalje, naj bosta funkciji $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b) ter $f(a) = g(a)$ in $f(b) = g(b)$. Dokaži, da obstaja $c \in (a, b)$, za katerega je $f'(c) = g'(c)$.
- (b) Naj bo funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna na $[0, 1]$, odvedljiva na $(0, 1)$ ter naj velja $f(0) = 0$ in $f(1) = 1$. Dokaži, da obstaja $c \in (0, 1)$, za katerega velja $f'(c) = 2c$.

2. **[25]** S pomočjo prvega in drugega odvoda čim bolj natančno nariši graf funkcije f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = x + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - x^3}.$$

3. **[25]** Naj bo $R > 0$. Med vsemi tetivnimi trapezi z osnovnico $2R$, ki so včrtani v krog s polmerom R , poišči tistega, ki pri vrtenju okoli osnovnice opiše telo z največjim volumnom. Volumen dobljenega telesa tudi izračunaj.

4. **[25]** Ali je funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - x & ; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

integrabilna? Utemelji!