

**Izpit pri predmetu Analiza II**  
**28. 6. 2019**

---

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. [20] Naj bo  $a > 0$  in  $n \in \mathbb{N}$ . Funkcija  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je podana s predpisom  $f(x) = \frac{a^{n+1}}{x^n}$ . Za poljubno tangento  $t$  na graf funkcije  $f$  označimo z  $A_t$  in  $B_t$  presečišči tangente  $t$  s koordinatnima osema,  $A_t \neq B_t$ . Med vsemi tangentami  $t$  poišči tisto, za katero je dolžina daljice  $A_t B_t$  najkrajša možna.

2. [20] Izračunaj

$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{x^4 + 1}} dx.$$

3. [20] Za katera realna števila  $a$  konvergira integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{(1+x^4)^a} dx?$$

4. [20] Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija in naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ , funkcijsko zaporedje.

- (a) Podaj primer funkcije  $f$ , za katero velja, da pripadajoče funkcijsko zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne konvergira enakomerno k funkciji  $f$ .
- (b) Naj bo za vsak  $n \in \mathbb{N}$  funkcija  $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  podana s predpisom  $g_n(x) = f_n(x)$ , funkcija  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pa z  $g(x) = f(x)$ . Dokaži, da funkcijsko zaporedje  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira enakomerno k funkciji  $g$ .

5. [20] Določi realne vrednosti  $a$  in  $b$  tako, da bo obstajala limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax^2} + b \ln(1+2x) - 1 - x}{\operatorname{sh} x - \sin x}.$$

Limito tudi izračunaj.