

**Izpit pri predmetu Analiza II**  
**28. 8. 2019**

---

**Navodila:** Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. [20] Naj bo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna na  $\mathbb{R}$ , odvedljiva v točki 0 in naj za vsaka  $x, y \in \mathbb{R}$  velja

$$f(x)f(y) \neq -1 \quad \text{in} \quad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}.$$

Dokaži, da je funkcija  $f$  odvedljiva na  $\mathbb{R}$ .

2. [20] Lik  $\mathcal{L}$  je v ravnini določen z naslednjo množico

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 4\sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju lika  $\mathcal{L}$  okoli osi  $y$ .

3. [20] Poišči vsa realna števila  $a$ , za katere konvergira integral

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x^a} dx.$$

4. [20] Razišči konvergenco po točkah in enakomerno konvergenco funkcijskega zaporedja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}.$$

5. [20] Razvij funkcijo  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt$ , v Taylorjevo vrsto v okolici točke  $x = 0$  in določi konvergenčno območje te vrste.