

Izpit pri predmetu Analiza II
6. 2. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Dokaži, da velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+nh) + f(x-nh) - 2f(x)}{h^2} = n^2 f''(x).$$

2. **[20]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x)^3}},$$

okoli osi x na intervalu $[0, \ln 2]$.

3. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Ali konvergira integral

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx?$$

Če konvergira, ga izračunaj.

4. **[20]** Razišči konvergenco po točkah in enakomerno konvergenco funkcijskega zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\ln(n^2 + x^2) - 2 \ln n}{x^2 + 1}.$$

5. **[20]** Določi konvergenčno območje vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 2n}{n!} (x-2)^n$$

in izračunaj njeno vsoto.