

Izpit pri predmetu Analiza II
28. 8. 2020

Navodila: Pripravite osebni dokument. Ugasnite in odstranite mobilni telefon. Pišite čitljivo, vse odgovore natančno utemeljite in jih nedvoumno podajte. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[20]** Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $f(0) = 0$. Nadalje, naj za vsak $x \in [0, 1]$ velja $|f'(x)| \leq |f(x)|$. Dokaži, da je $f(x) = 0$ za vsak $x \in [0, 1]$.

2. **[20]** Izračunaj dolžino loka, ki ga določa graf funkcije $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{2x - 1})$.

3. [20] Ali konvergira integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2(1-\sqrt[3]{x})} dx?$$

Utemelji!

4. [20] Razišči konvergenco po točkah in enakomerno konvergenco funkcijskega zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{(2x)^n}{2^n + x^n}.$$

5. [20] Za katere vrednosti realnih parametrov a in b obstaja (končna) limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot x \cdot \sqrt{1+x^2} - b \cdot \sin x \cdot \ln(1-x) - 2x - x^2}{2x(1 - \cos x)}?$$

V tem primeru limito tudi izračunaj.