

Izpit pri predmetu Analiza II
15. 6. 2020

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. [20] Dokaži, da za poljubni števili $a, b \in (e, \infty)$ velja

$$\left| \frac{b \ln a - a \ln b}{ab} \right| \leq \frac{\ln(\max\{a, b\})}{(\min\{a, b\})^2} |b - a|.$$

2. [20] Izračunaj

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{x}} - e^2}{\sin(2x)},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{1}{n + \sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - n}} + \frac{1}{2n} \right).$

3. [20] Poišči vsa realna števila a , za katera konvergira integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{x^{3a} + 1} dx.$$

4. [20] Razišči konvergenco po točkah in enakomerno konvergenco funkcijskega zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x e^{-nx^2}.$$

5. [20] Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(3+2x-x^2)^5}}$. Izračunaj $f^{(2020)}(1)$.