

Izpit pri predmetu Analiza IV
16. 6. 2020

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. [25] Naj bo $R > 0$. Telo v prostoru \mathbb{R}^3 je določeno takole

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Rz \leq 0 \quad \text{in} \quad z \geq -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Izračunaj vztrajnostni moment homogenega telesa pri vrtenju okoli osi z . Telo tudi skiciraj.

2. [25] Krivulja \mathcal{K} je podana parametrično $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (t, 1 - t^4, t^2 - 1)$.

(a) Skiciraj pravokotne projekcije krivulje \mathcal{K} na ravnine z enačbami $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$. Nato poišči še ploskev na kateri leži krivulja \mathcal{K} in s pomočjo le-te ter projekcij skiciraj krivuljo \mathcal{K} .

(b) Ali obstaja točka na krivulji \mathcal{K} , v kateri tangenta na krivuljo \mathcal{K} seka os y ? Utemelji!

3. [25] Ploskev \mathcal{P} dobimo tako, da krivuljo z enačbo $(x^2 + y^2)^2 = x$, ki leži na ravnini z enačbo $z = 0$, zavrtimo okoli osi x .

(a) Parametriziraj in skiciraj ploskev \mathcal{P} .

(b) Poišči enačbo tangentne ravnine na ploskev \mathcal{P} v točki $T\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}, 0\right)$.

4. [25] Telo \mathcal{G} v prostoru \mathbb{R}^3 je določeno z

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{in} \quad 0 \leq z \leq x + y + 3,$$

vektorsko polje $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pa s predpisom $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 0, 1)$. Skiciraj območje \mathcal{G} in izračunaj pretok vektorskega polja \vec{F} skozi ploskev $\partial\mathcal{G}$ v smeri zunanje normale na dva načina:

(a) direktno,

(b) s pomočjo Gaussovega izreka.