Izpit pri predmetu Analiza IV
26. 6. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[25]** Množica D je v polravnini $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ določena s krivuljami z enačbami $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $y = 0$ in $y = \frac{x}{2}$. Izračunaj
$$\iint_D \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^4\right) e^{x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

2. **[25]** Izračunaj maso telesa, ki leži v polprostoru $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$ in ga omejuje ploskev z enačbo
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 - y^2,$$
če veš, da je gostota telesa v posamezni točki enaka oddaljenosti te točke od izhodišča.

3. **[25]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama
$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad z = 1 - y.$$
   (a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$ in jo skiciraj.
   (b) Ali obstajajo točke T na krivulji $\mathcal{K}$ z naslednjo lastnostjo: tangenta na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki T seka premico q z enačbo $x = z = 0$, $y \in \mathbb{R}$? Če obstajajo, jih poišči.

4. **[25]** Naj bo $R > 0$. Ploskev $\mathcal{P}$ je podana z enačbo $z = x^2 + (y - R)^2$, vektorskego polje $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa s predpisom $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z(x^2 + y^2))$. Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}$
   (a) skozi tisti del ploskve $\mathcal{P}$, ki zadošča pogoju $x^2 + y^2 \leq R^2$;
   (b) skozi ∂G, če je G telo, ki ga omejujejo ploskev $\mathcal{P}$ ter ploskvi z enačbama $x^2 + y^2 = R^2$ in $z = 0$.

   V obeh primerih skiciraj območje. Vse ploskve so oreientirane v smeri zunanje normale.

Izpit pri predmetu Vektorska analiza
26. 6. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[25]** Množica D je v polravnini $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ določena s krivuljami z enačbami $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $y = 0$ in $y = \frac{x}{2}$. Izračunaj
$$\iint\limits_D \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^4\right) e^{x^2-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

2. **[25]** Izračunaj maso telesa, ki leži v polprostoru $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$ in ga omejuje ploskev z enačbo
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 - y^2,$$
če veš, da je gostota telesa v posamezni točki enaka oddaljenosti te točke od izhodišča.

3. **[25]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama
$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad z = 1 - y.$$
   (a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$ in jo skiciraj.
   (b) Izračunaj enačbo tangente in glavne normale na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki $T(0, \frac{1}{2}, z)$

4. **[25]** Naj bo $R > 0$. Ploskev $\mathcal{P}$ je podana z enačbo $z = x^2 + (y - R)^2$, vektorskego polje $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa s predpisom $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z(x^2 + y^2))$. Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}$
   (a) skozi tisti del ploskve $\mathcal{P}$, ki zadošča pogoju $x^2 + y^2 \leq R^2$;
   (b) skozi ∂G, če je G telo, ki ga omejujejo ploskev $\mathcal{P}$ ter ploskvi z enačbama $x^2 + y^2 = R^2$ in $z = 0$.

   V obeh primerih skiciraj območje. Vse ploskve so oreientirane v smeri zunanje normale.