

Izpit pri predmetu Analiza IV
30. 8. 2019

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljena sta največ dva A4 lista s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. [25] Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja \mathcal{K} podana z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2.$$

Krivuljo \mathcal{K} tudi skiciraj.

2. [25] Naj bo $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in naj bo \mathcal{S} ploskev podana z enačbo

$$z = x \cdot f\left(\frac{x}{y}\right),$$

kjer je $x > 0$ in $y > 0$. Dokaži, da imajo vse tangentne ravnine na ploskev \mathcal{S} skupno točko.

3. [25] Krivulja \mathcal{K} je podana parametrično s predpisom $\vec{r} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\vec{r}(t) = \left(t^2, \frac{t^4}{2}, \ln(t) \right).$$

- (a) Natančno skiciraj projekcije krivulje \mathcal{K} na ravnine $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$.
- (b) Poišči vse točke na krivulji \mathcal{K} , v katerih drugi odvod $\ddot{\vec{r}}(t)$ kaže v smer glavne normale krivulje \mathcal{K} v točki $\vec{r}(t)$.

4. [25] Naj bo G podprostor v \mathbb{R}^3 določen z neenačbami

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad z \leq x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad z \geq 0.$$

Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z)$, skozi ∂G . Pri tem je ∂G orientiran v smeri zunanje normale. Območje G tudi skiciraj.