

Square Lattice

$(d, n) = (1, 1)$

$\text{Chi}(P_{16} \square P_{16}) = 13$ (largest finite lattice with 13-coloring)-SAT solver

```
1 3 1 10 1 4 1 5 1 3 1 2 1 3 1 2
5 1 7 1 2 1 3 1 2 1 4 1 5 1 6 1
1 2 1 3 1 13 1 6 1 9 1 3 1 2 1 3
11 1 4 1 5 1 2 1 3 1 2 1 7 1 4 1
1 3 1 2 1 3 1 4 1 5 1 11 1 3 1 2
2 1 6 1 8 1 7 1 2 1 3 1 2 1 5 1
1 5 1 3 1 2 1 3 1 10 1 4 1 8 1 3
3 1 2 1 4 1 5 1 12 1 2 1 3 1 2 1
1 7 1 9 1 3 1 2 1 3 1 5 1 6 1 4
2 1 3 1 2 1 6 1 4 1 7 1 2 1 3 1
1 4 1 5 1 11 1 3 1 2 1 3 1 9 1 5
3 1 2 1 3 1 2 1 5 1 13 1 4 1 2 1
1 6 1 10 1 4 1 8 1 3 1 2 1 3 1 7
2 1 3 1 7 1 3 1 2 1 6 1 5 1 11 1
1 12 1 2 1 5 1 9 1 4 1 3 1 2 1 3
5 1 4 1 3 1 2 1 3 1 2 1 10 1 12 1
```

$\text{Chi}(P_{22} \square P_{22}) \leq 14$ (largest finite lattice with 14-coloring)-SAT solver

```
1 11 1 5 1 3 1 8 1 2 1 3 1 10 1 5 1 2 1 3 1 2
10 1 2 1 7 1 2 1 3 1 4 1 6 1 2 1 3 1 12 1 5 1
1 3 1 4 1 6 1 5 1 13 1 2 1 3 1 7 1 14 1 2 1 6
5 1 12 1 2 1 3 1 2 1 11 1 5 1 4 1 2 1 3 1 8 1
1 2 1 3 1 9 1 4 1 7 1 3 1 2 1 3 1 5 1 4 1 11
6 1 8 1 5 1 2 1 3 1 2 1 8 1 9 1 6 1 2 1 3 1
1 3 1 2 1 3 1 10 1 5 1 4 1 3 1 2 1 3 1 7 1 5
2 1 7 1 4 1 14 1 2 1 3 1 2 1 5 1 4 1 10 1 2 1
1 5 1 3 1 2 1 3 1 6 1 12 1 7 1 3 1 2 1 3 1 4
3 1 2 1 11 1 5 1 4 1 2 1 3 1 2 1 13 1 5 1 9 1
1 4 1 6 1 3 1 2 1 3 1 5 1 4 1 11 1 3 1 2 1 3
2 1 3 1 2 1 7 1 8 1 9 1 2 1 3 1 2 1 4 1 6 1
1 10 1 5 1 4 1 3 1 2 1 3 1 6 1 5 1 7 1 3 1 2
3 1 2 1 3 1 2 1 5 1 4 1 10 1 2 1 3 1 2 1 5 1
1 8 1 9 1 13 1 6 1 3 1 2 1 3 1 4 1 8 1 12 1 3
5 1 4 1 2 1 3 1 2 1 7 1 5 1 14 1 2 1 3 1 2 1
1 2 1 3 1 5 1 4 1 11 1 3 1 2 1 3 1 5 1 4 1 7
3 1 6 1 7 1 2 1 3 1 2 1 4 1 9 1 6 1 2 1 3 1
1 14 1 2 1 3 1 12 1 5 1 8 1 3 1 2 1 3 1 11 1 5
2 1 5 1 4 1 10 1 2 1 3 1 2 1 5 1 4 1 10 1 2 1
1 11 1 3 1 2 1 3 1 4 1 6 1 13 1 7 1 2 1 3 1 6
3 1 2 1 8 1 5 1 7 1 2 1 3 1 2 1 3 1 5 1 4 1
```

(d,n)=(2,2) [12-20] old result [11-20]

Chi(C₂₀ □ C₂₀) ≤ 20

SA algorithm

S=(2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11)

```

3 4 9 1 2 6 5 12 1 2 8 6 5 1 2 12 3 16 1 2
1 2 5 3 4 1 2 7 4 9 1 2 14 7 17 1 2 19 13 8
7 11 1 2 8 16 3 1 2 5 3 4 1 2 6 4 5 1 2 6
2 3 4 18 1 2 4 6 13 1 2 15 11 3 1 2 9 3 4 1
5 1 2 6 3 5 1 2 8 4 7 1 2 5 8 10 1 2 14 12
15 8 10 1 2 7 9 3 1 2 6 3 4 1 2 7 4 6 1 2
1 2 3 4 17 1 2 4 5 10 1 2 9 12 3 1 2 5 3 4
9 6 1 2 11 3 6 1 2 3 4 8 1 2 6 13 18 1 2 7
2 16 19 5 1 2 8 12 7 1 2 5 3 4 1 2 8 4 10 1
4 1 2 3 4 10 1 2 4 6 14 1 2 7 11 3 1 2 6 3
5 12 7 1 2 13 3 5 1 2 3 4 10 1 2 5 9 17 1 2
1 2 6 14 9 1 2 15 11 8 1 2 6 3 4 1 2 7 4 8
3 4 1 2 3 4 6 1 2 4 5 9 1 2 8 12 3 1 2 11
2 10 18 5 1 2 16 3 10 1 2 7 4 19 1 2 6 5 15 1
6 1 2 20 8 7 1 2 17 6 3 1 2 5 3 4 1 2 3 4
5 3 4 1 2 3 4 5 1 2 12 8 11 1 2 7 14 8 1 2
1 2 13 11 6 1 2 9 3 4 1 2 6 4 10 1 2 4 9 12
4 8 1 2 5 10 14 1 2 7 5 3 1 2 18 3 5 1 2 3
2 6 3 4 1 2 8 4 6 1 2 4 13 9 1 2 6 11 7 1
10 1 2 7 15 3 1 2 11 3 10 1 2 3 4 8 1 2 4 5

```

11-coloring of P₁₂ □ P₁₂ was UNSAT after 18 hours (4 cores).

(d,n)=(2,3) [8] old result [7-8]

Chi(C₂₀ □ C₂₀) = 8

7-coloring of P₁₂ □ P₁₂ was UNSAT using SAT solver.

S=(2 2 2 3 3 3 4 4)

```

1 3 7 2 4 1 3 5 2 6 1 3 7 2 4 1 3 6 2 5
2 4 1 3 5 2 6 1 3 8 2 4 1 3 6 2 5 1 3 8
3 5 2 6 1 3 7 2 4 1 3 6 2 5 1 3 7 2 4 1
6 1 3 8 2 4 1 3 6 2 5 1 3 8 2 4 1 3 5 2
7 2 4 1 3 6 2 5 1 3 7 2 4 1 3 5 2 6 1 3
1 3 6 2 5 1 3 8 2 4 1 3 5 2 6 1 3 8 2 4
2 5 1 3 7 2 4 1 3 5 2 6 1 3 7 2 4 1 3 6
3 8 2 4 1 3 5 2 6 1 3 8 2 4 1 3 6 2 5 1
4 1 3 5 2 6 1 3 7 2 4 1 3 6 2 5 1 3 7 2
5 2 6 1 3 8 2 4 1 3 6 2 5 1 3 8 2 4 1 3
1 3 7 2 4 1 3 6 2 5 1 3 7 2 4 1 3 5 2 6
2 4 1 3 6 2 5 1 3 8 2 4 1 3 5 2 6 1 3 8
3 6 2 5 1 3 7 2 4 1 3 5 2 6 1 3 7 2 4 1
5 1 3 8 2 4 1 3 5 2 6 1 3 8 2 4 1 3 6 2
7 2 4 1 3 5 2 6 1 3 7 2 4 1 3 6 2 5 1 3
1 3 5 2 6 1 3 8 2 4 1 3 6 2 5 1 3 8 2 4
2 6 1 3 7 2 4 1 3 6 2 5 1 3 7 2 4 1 3 5
3 8 2 4 1 3 6 2 5 1 3 8 2 4 1 3 5 2 6 1
4 1 3 6 2 5 1 3 7 2 4 1 3 5 2 6 1 3 7 2
6 2 5 1 3 8 2 4 1 3 5 2 6 1 3 8 2 4 1 3

```

(d,n)=(3,3) [16-26] old result [16-33]

Chi (C₂₀ □ C₂₀) <=26

SA algorithm

S=(3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9 10 10 10 11 11)

```

15 1 6 19 16 1 2 5 3 6 12 18 23 1 10 11 3 1 2 7
18 3 4 2 9 3 25 21 14 4 1 2 5 3 9 2 20 17 12 5
 2 13 23 1 5 7 6 1 2 9 3 7 19 8 6 1 4 14 3 1
26 10 11 3 12 2 4 3 8 5 10 11 1 2 13 3 5 2 8 6
 3 1 2 6 15 1 18 13 17 1 2 6 3 4 12 7 25 1 9 16
 5 21 7 4 14 3 9 2 7 3 16 15 9 5 1 2 6 3 4 2
12 20 3 1 2 8 5 1 6 12 4 1 2 14 3 8 18 10 19 1
 6 2 9 24 22 10 11 3 23 2 8 3 7 6 11 4 1 2 13 3
 4 1 17 5 3 1 2 4 19 1 5 13 10 1 2 9 3 5 15 14
11 3 8 2 13 6 7 15 14 3 9 2 4 3 22 16 7 6 1 2
10 7 18 1 4 9 3 1 2 6 11 1 12 8 5 1 2 4 3 9
 1 2 6 3 12 2 8 5 10 4 7 3 20 2 6 3 17 21 8 5
 3 4 15 14 11 1 21 17 3 1 2 5 15 1 4 10 11 1 2 23
13 25 1 2 5 3 6 2 9 16 8 6 24 3 7 2 5 3 12 6
 2 9 3 8 10 7 4 1 12 13 3 1 2 9 18 1 26 14 4 1
16 5 20 6 1 2 18 3 5 2 14 4 11 5 8 3 19 2 7 3
11 1 2 4 3 9 15 8 6 1 10 7 3 1 2 6 15 1 10 8
 6 3 7 17 13 5 1 2 4 3 9 2 17 21 12 4 9 3 5 2
 4 14 12 1 2 6 3 7 22 20 5 1 6 16 3 1 2 13 24 1
 9 2 5 3 8 4 10 11 1 2 8 3 4 2 7 5 8 6 22 3

```

(d,n)=(3,4) [12-15] old result [12-20]

Chi (C₁₆ □ C₁₆) <=15

SA algorithm

S=(3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6)

```

 8 2 13 3 7 2 5 12 1 6 4 3 1 2 10 3
 9 4 12 1 6 4 15 11 3 7 2 14 8 4 5 1
15 3 11 2 10 3 1 2 4 5 1 12 6 3 7 2
 6 1 8 4 5 14 7 6 8 10 3 4 2 1 13 4
10 2 7 3 1 2 4 3 1 2 15 7 5 9 8 3
 5 4 9 6 13 8 12 5 9 4 6 1 3 4 2 1
11 3 1 2 4 3 1 2 7 3 11 2 10 12 6 7
 2 8 12 5 7 10 6 4 14 1 5 4 8 1 3 4
 1 6 4 3 1 2 11 3 8 2 13 3 7 2 5 9
 3 7 2 14 8 4 5 1 12 4 9 1 6 4 15 10
 4 5 1 9 6 3 7 2 15 3 10 2 11 3 1 2
 8 11 3 4 2 1 13 4 6 1 8 4 5 14 7 6
 1 2 15 7 5 12 8 3 11 2 7 3 1 2 4 3
12 4 6 1 3 4 2 1 5 4 12 6 13 8 9 5
 7 3 10 2 11 9 6 7 10 3 1 2 4 3 1 2
14 1 5 4 8 1 3 4 2 8 9 5 7 11 6 4

```

Chi (C₁₂ □ C₁₂) <=16

SAT solver!

S=(3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6)

```

 1 4 12 7 8 6 5 2 1 15 8 2
14 10 3 16 4 1 3 10 4 6 13 9
 7 2 11 5 9 2 12 7 11 3 1 4
 3 8 4 1 3 14 4 1 2 16 5 12
 1 6 13 2 7 15 6 3 9 4 10 2
 4 9 3 12 4 1 2 5 8 1 3 11
 5 2 1 8 11 3 10 4 12 2 7 15
 3 10 7 6 2 9 16 1 3 13 4 8
12 4 14 3 1 4 7 2 11 5 9 6
 2 1 5 15 13 12 3 6 4 10 3 16
11 8 9 4 10 2 1 8 14 2 1 4
 3 6 2 1 3 11 4 9 3 12 7 5

```

(d,n)=(3,5) [11-12] old result [10-17]

Chi (C₁₂ □ C₁₂) ≤ 12 SAT solver
S=(3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5)

```
1 7 5 3 1 2 4 8 5 3 4 2
3 4 2 8 10 5 3 1 2 7 6 5
10 9 1 12 4 11 6 9 4 12 1 11
2 5 6 7 3 1 2 5 10 8 3 4
1 3 4 2 5 8 4 3 1 2 5 7
12 8 11 1 9 10 12 7 11 4 9 6
4 10 5 3 4 2 1 6 5 3 1 2
3 1 2 6 7 5 3 4 2 10 8 5
7 9 4 12 1 11 8 9 1 12 4 11
2 5 8 10 3 4 2 5 7 6 3 1
4 3 1 2 5 6 1 3 4 2 5 10
12 6 11 4 9 7 12 10 11 1 9 8
```

10-coloring of P₁₂ □ P₁₂ was UNSAT after 455 sekunds (4 cores).

(d,n)=(3,6) [10] old result [10-14]

Chi (C₄₀ □ C₄₀) ≤ 10 SAT solver

S=(3 3 3 3 3 3 4 4 4 4)

```
8 4 1 10 5 9 4 1 7 6 10 3 1 8 4 7 2 6 9 3 8 5 1 10 2 9 1 3 7 6 10 3 5 8 1 7 4 2 9 3
6 2 3 7 6 2 3 5 8 4 2 5 6 9 3 1 5 4 10 2 6 4 3 7 6 4 5 2 8 1 4 2 6 9 3 5 6 1 10 5
1 9 5 8 4 1 10 6 9 3 1 7 4 10 2 6 8 3 7 5 1 9 2 8 1 3 10 6 9 3 5 7 1 10 4 2 8 3 7 4
3 10 6 2 3 5 7 4 2 5 6 8 3 1 5 4 9 2 6 4 3 10 6 4 5 2 7 1 4 2 6 8 3 5 6 1 9 5 6 2
5 7 4 1 9 6 8 3 1 10 4 9 2 6 7 3 10 5 1 8 2 7 1 3 9 6 8 3 5 10 1 9 4 2 7 3 10 4 1 8
6 2 3 5 10 4 2 5 6 7 3 1 5 4 8 2 6 4 3 9 6 4 5 2 10 1 4 2 6 7 3 5 6 1 8 5 6 2 3 9
4 1 8 6 7 3 1 9 4 8 2 6 10 3 9 5 1 7 2 10 1 3 8 6 7 3 5 9 1 8 4 2 10 3 9 4 1 7 5 10
3 5 9 4 2 5 6 10 3 1 5 4 7 2 6 4 3 8 6 4 5 2 9 1 4 2 6 10 3 5 6 1 7 5 6 2 3 8 6 2
7 6 10 3 1 8 4 7 2 6 9 3 8 5 1 10 2 9 1 3 7 6 10 3 5 8 1 7 4 2 9 3 8 4 1 10 5 9 4 1
8 4 2 5 6 9 3 1 5 4 10 2 6 4 3 7 6 4 5 2 8 1 4 2 6 9 3 5 6 1 10 5 6 2 3 7 6 2 3 5
9 3 1 7 4 10 2 6 8 3 7 5 1 9 2 8 1 3 10 6 9 3 5 7 1 10 4 2 8 3 7 4 1 9 5 8 4 1 10 6
2 5 6 8 3 1 5 4 9 2 6 4 3 10 6 4 5 2 7 1 4 2 6 8 3 5 6 1 9 5 6 2 3 10 6 2 3 5 7 4
1 10 4 9 2 6 7 3 10 5 1 8 2 7 1 3 9 6 8 3 5 10 1 9 4 2 7 3 10 4 1 8 5 7 4 1 9 6 8 3
6 7 3 1 5 4 8 2 6 4 3 9 6 4 5 2 10 1 4 2 6 7 3 5 6 1 8 5 6 2 3 9 6 2 3 5 10 4 2 5
4 8 2 6 10 3 9 5 1 7 2 10 1 3 8 6 7 3 5 9 1 8 4 2 10 3 9 4 1 7 5 10 4 1 8 6 7 3 1 9
3 1 5 4 7 2 6 4 3 8 6 4 5 2 9 1 4 2 6 10 3 5 6 1 7 5 6 2 3 8 6 2 3 5 9 4 2 5 6 10
2 6 9 3 8 5 1 10 2 9 1 3 7 6 10 3 5 8 1 7 4 2 9 3 8 4 1 10 5 9 4 1 7 6 10 3 1 8 4 7
5 4 10 2 6 4 3 7 6 4 5 2 8 1 4 2 6 9 3 5 6 1 10 5 6 2 3 7 6 2 3 5 8 4 2 5 6 9 3 1
8 3 7 5 1 9 2 8 1 3 10 6 9 3 5 7 1 10 4 2 8 3 7 4 1 9 5 8 4 1 10 6 9 3 1 7 4 10 2 6
9 2 6 4 3 10 6 4 5 2 7 1 4 2 6 8 3 5 6 1 9 5 6 2 3 10 6 2 3 5 7 4 2 5 6 8 3 1 5 4
10 5 1 8 2 7 1 3 9 6 8 3 5 10 1 9 4 2 7 3 10 4 1 8 5 7 4 1 9 6 8 3 1 10 4 9 2 6 7 3
6 4 3 9 6 4 5 2 10 1 4 2 6 7 3 5 6 1 8 5 6 2 3 9 6 2 3 5 10 4 2 5 6 7 3 1 5 4 8 2
1 7 2 10 1 3 8 6 7 3 5 9 1 8 4 2 10 3 9 4 1 7 5 10 4 1 8 6 7 3 1 9 4 8 2 6 10 3 9 5
3 8 6 4 5 2 9 1 4 2 6 10 3 5 6 1 7 5 6 2 3 8 6 2 3 5 9 4 2 5 6 10 3 1 5 4 7 2 6 4
2 9 1 3 7 6 10 3 5 8 1 7 4 2 9 3 8 4 1 10 5 9 4 1 7 6 10 3 1 8 4 7 2 6 9 3 8 5 1 10
6 4 5 2 8 1 4 2 6 9 3 5 6 1 10 5 6 2 3 7 6 2 3 5 8 4 2 5 6 9 3 1 5 4 10 2 6 4 3 7
1 3 10 6 9 3 5 7 1 10 4 2 8 3 7 4 1 9 5 8 4 1 10 6 9 3 1 7 4 10 2 6 8 3 7 5 1 9 2 8
5 2 7 1 4 2 6 8 3 5 6 1 9 5 6 2 3 10 6 2 3 5 7 4 2 5 6 8 3 1 5 4 9 2 6 4 3 10 6 4
9 6 8 3 5 10 1 9 4 2 7 3 10 4 1 8 5 7 4 1 9 6 8 3 1 10 4 9 2 6 7 3 10 5 1 8 2 7 1 3
10 1 4 2 6 7 3 5 6 1 8 5 6 2 3 9 6 2 3 5 10 4 2 5 6 7 3 1 5 4 8 2 6 4 3 9 6 4 5 2
7 3 5 9 1 8 4 2 10 3 9 4 1 7 5 10 4 1 8 6 7 3 1 9 4 8 2 6 10 3 9 5 1 7 2 10 1 3 8 6
4 2 6 10 3 5 6 1 7 5 6 2 3 8 6 2 3 5 9 4 2 5 6 10 3 1 5 4 7 2 6 4 3 8 6 4 5 2 9 1
5 8 1 7 4 2 9 3 8 4 1 10 5 9 4 1 7 6 10 3 1 8 4 7 2 6 9 3 8 5 1 10 2 9 1 3 7 6 10 3
6 9 3 5 6 1 10 5 6 2 3 7 6 2 3 5 8 4 2 5 6 9 3 1 5 4 10 2 6 4 3 7 6 4 5 2 8 1 4 2
1 10 4 2 8 3 7 4 1 9 5 8 4 1 10 6 9 3 7 5 1 7 4 10 2 6 8 3 7 5 1 9 2 8 1 3 10 6 9 3 5 7
3 5 6 1 9 5 6 2 3 10 6 2 3 5 7 4 2 5 6 8 3 1 5 4 9 2 6 4 3 10 6 4 5 2 7 1 4 2 6 8
4 2 7 3 10 4 1 8 5 7 4 1 9 6 8 3 1 10 4 9 2 6 7 3 10 5 1 8 2 7 1 3 9 6 8 3 5 10 1 9
6 1 8 5 6 2 3 9 6 2 3 5 10 4 2 5 6 7 3 1 5 4 8 2 6 4 3 9 6 4 5 2 10 1 4 2 6 7 3 5
10 3 9 4 1 7 5 10 4 1 8 6 7 3 1 9 4 8 2 6 10 3 9 5 1 7 2 10 1 3 8 6 7 3 5 9 1 8 4 2
7 5 6 2 3 8 6 2 3 5 9 4 2 5 6 10 3 1 5 4 7 2 6 4 3 8 6 4 5 2 9 1 4 2 6 10 3 5 6 1
```

(d, n) = (3, 8) [8]

Chi (C₁₆ □ C₁₆) = 8

S = (3 3 3 3 3 3 3 3)

```

3 5 1 7 6 2 1 4 3 5 1 4 3 2 1 7
2 6 4 8 5 3 7 8 2 6 7 8 5 6 4 8
1 7 3 2 1 4 6 5 1 4 3 2 1 7 3 5
4 8 5 6 7 8 2 3 7 8 5 6 4 8 2 6
3 2 1 4 3 5 1 4 6 2 1 7 3 5 1 7
5 6 7 8 2 6 7 8 5 3 4 8 2 6 4 8
1 4 3 5 1 4 3 2 1 7 6 5 1 7 3 2
7 8 2 6 7 8 5 6 4 8 2 3 4 8 5 6
3 5 1 4 3 2 1 7 3 5 1 7 6 2 1 4
2 6 7 8 5 6 4 8 2 6 4 8 5 3 7 8
1 4 3 2 1 7 3 5 1 7 3 2 1 4 6 5
7 8 5 6 4 8 2 6 4 8 5 6 7 8 2 3
6 2 1 7 3 5 1 7 3 2 1 4 3 5 1 4
5 3 4 8 2 6 4 8 5 6 7 8 2 6 7 8
1 7 6 5 1 7 3 2 1 4 3 5 1 4 3 2
4 8 2 3 4 8 5 6 7 8 2 6 7 8 5 6

```

(d, n) = (4, 4) [25-45] old result [25-56]

-

Chi (C₂₆ □ C₂₆) ≤ 45 SA

S = (4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 11 11 12 12 12 12 13 13 13 13 13 14 14 14 14 15)

```

17 5 3 7 9 1 18 5 4 3 16 8 17 12 26 3 2 22 1 5 13 4 11 7 14 8
1 31 35 4 12 15 22 6 10 7 20 2 25 1 5 15 4 41 8 6 2 37 18 3 9 2
40 10 13 21 11 3 2 8 1 23 13 4 3 19 6 9 16 27 3 10 23 1 15 5 4 30
3 28 8 1 5 16 4 24 9 12 5 14 11 10 8 7 1 12 36 4 17 34 29 6 12 20
7 4 6 14 27 17 7 29 3 2 6 1 38 30 4 39 13 2 11 14 7 3 2 8 1 11
5 15 9 3 2 10 1 19 26 4 8 7 18 2 40 3 28 6 21 1 5 9 4 10 19 16
18 1 12 23 4 8 13 5 11 21 15 3 9 22 1 5 20 4 15 8 31 25 26 13 3 2
8 24 22 7 20 6 3 2 33 1 10 16 4 12 23 17 45 10 3 16 2 6 1 7 32 4
6 3 2 5 1 25 9 4 7 32 34 5 6 24 11 2 7 1 19 43 4 11 35 5 14 21
17 10 4 16 11 15 14 12 8 28 2 13 1 3 14 4 29 9 12 18 30 3 8 2 9 1
7 13 19 8 3 2 30 1 6 17 4 19 7 37 15 8 6 5 2 13 1 10 23 4 12 27
2 29 1 6 39 4 18 10 5 3 9 20 27 2 10 1 26 33 4 7 24 20 22 16 15 3
4 26 9 12 7 21 24 22 2 23 1 8 42 4 31 3 16 11 38 14 6 2 28 1 11 8
37 14 34 2 5 1 3 13 4 16 14 11 5 6 12 7 2 25 1 17 9 4 3 7 5 6
1 20 33 4 17 8 6 35 40 7 36 2 41 1 9 18 4 8 3 15 12 19 44 13 10 18
3 7 15 11 10 38 9 19 1 29 15 4 21 3 32 13 22 6 10 2 5 1 21 31 4 2
12 5 6 1 16 28 4 12 3 5 6 10 17 8 2 5 1 20 27 4 7 11 6 36 9 24
8 4 22 3 2 14 7 31 8 2 26 1 24 7 4 11 3 34 23 16 8 3 2 14 1 25
19 30 13 27 23 5 1 20 11 4 9 3 12 19 28 30 14 2 9 1 29 26 4 5 7 17
32 1 21 9 4 6 3 10 25 18 22 13 2 6 1 15 8 4 5 6 18 10 12 15 3 16
11 10 2 7 12 8 15 2 16 1 7 8 4 5 3 10 7 21 13 3 2 22 1 8 6 4
5 14 41 26 1 24 17 4 5 3 33 14 11 20 9 2 17 1 24 11 4 7 9 20 2 39
18 8 4 3 36 11 13 9 6 12 2 37 1 23 16 4 6 31 12 25 14 5 3 33 13 1
7 15 29 6 5 2 7 1 8 19 4 10 3 7 8 18 5 3 2 15 1 6 28 4 38 23
12 2 1 20 10 4 3 30 28 27 15 5 6 2 13 1 35 32 4 19 16 8 2 10 27 3
4 16 19 25 8 34 32 14 2 11 1 9 21 4 29 14 11 7 20 9 3 42 21 1 24 6

```

(d, n) = (4, 5) [20-31] old result [20-34]

Chi (C₂₄ □ C₂₄) ≤ 31

SA

S=(4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 10)

3 20 13 8 12 10 4 14 7 23 5 3 16 6 26 24 13 25 1 6 11 2 23 1
14 4 19 7 5 11 25 18 6 13 27 20 1 9 5 2 8 21 31 3 4 22 8 24
18 26 15 6 2 21 1 3 9 4 15 8 11 10 3 4 7 17 5 10 12 13 7 5
11 1 3 9 4 16 8 5 10 12 22 7 2 18 14 1 6 15 2 16 1 9 6 2
17 8 5 10 14 13 7 2 17 1 3 6 4 13 28 23 9 3 4 8 14 20 3 4
12 7 2 23 1 3 6 4 11 24 5 9 21 25 8 5 10 30 29 7 5 19 10 21
9 6 4 20 18 5 9 15 19 8 2 10 1 3 7 2 11 1 13 6 2 25 15 1
13 16 22 11 8 2 12 1 3 7 4 14 31 15 6 12 4 18 26 9 3 4 8 5
14 10 1 3 7 4 26 10 5 6 13 29 16 5 9 17 3 8 5 10 1 24 7 2
4 19 5 9 6 17 14 21 2 9 1 3 8 2 10 1 27 7 2 22 12 11 6 3
18 8 2 15 13 1 3 8 4 30 12 18 7 20 4 13 19 6 15 4 16 5 17 20
1 7 12 4 10 5 11 7 27 25 10 5 6 11 3 24 5 9 1 21 8 2 10 9
5 6 3 24 16 2 9 6 1 3 15 2 9 1 23 8 2 10 25 14 7 3 4 23
2 11 14 1 8 19 4 20 13 17 8 4 26 22 12 7 4 3 11 5 6 1 15 13
22 4 9 5 7 3 12 10 2 5 7 14 3 10 5 6 1 20 17 2 9 19 12 8
3 21 10 2 6 15 1 18 23 9 6 1 19 13 2 9 15 16 8 4 10 18 5 7
16 1 17 13 4 25 5 8 3 24 16 11 28 4 21 3 14 5 7 1 3 26 2 6
20 5 8 3 27 9 2 7 22 29 10 2 5 7 1 18 10 2 6 23 24 11 4 9
15 2 7 12 1 10 11 6 14 1 4 3 12 6 17 8 4 13 9 22 5 8 1 10
19 4 6 23 5 16 3 21 26 5 8 15 25 20 27 5 19 1 3 12 2 7 14 3
25 11 9 18 2 8 13 4 17 2 7 9 1 10 3 2 7 11 15 4 16 6 13 5
8 1 3 14 15 7 19 20 12 3 6 18 13 14 4 29 6 28 5 20 1 17 21 2
7 10 5 4 22 6 9 5 28 11 31 30 2 8 22 1 9 10 2 8 18 3 4 12
6 16 2 17 1 3 24 2 8 1 10 4 19 7 15 12 3 4 14 7 27 5 15 9

(d, n) = (4, 6)

[18-26]

old result [18-28]

Chi (C₂₄ □ C₂₄) ≤ 26

SA

S=(4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 8 8)

2 7 10 15 5 2 8 21 10 11 20 14 1 19 10 6 16 3 15 14 10 4 3 5
16 12 4 3 11 14 7 4 3 5 2 8 4 12 9 2 11 24 1 12 9 6 23 1
13 18 6 9 22 1 12 6 13 9 16 7 6 17 3 5 8 7 4 25 5 2 8 11
3 5 2 8 20 17 5 2 19 18 1 10 11 15 22 1 13 10 6 3 20 19 7 4
15 14 1 7 4 3 10 11 8 4 12 3 5 2 14 4 18 9 2 11 16 1 12 6
9 10 21 12 6 16 9 1 7 6 21 23 9 8 7 6 3 17 5 8 4 26 24 2
8 4 3 11 5 18 24 14 3 5 2 13 4 1 10 11 12 15 1 7 6 3 18 22
7 6 13 19 1 8 4 15 26 10 11 17 6 3 19 5 2 4 21 14 9 10 17 1
12 5 2 9 23 7 6 2 20 9 1 7 12 18 25 9 8 6 3 13 5 2 4 20
11 16 15 4 3 10 5 12 16 4 3 14 5 2 4 1 7 10 11 12 1 8 6 3
10 1 8 6 14 11 13 1 8 6 24 15 10 11 6 3 16 5 2 4 15 7 19 9
4 18 7 5 2 21 9 3 7 5 2 22 1 8 13 12 14 18 9 6 3 23 5 2
6 3 12 20 1 4 19 17 10 11 12 4 3 7 5 2 4 1 8 17 10 11 1 13
14 17 9 10 16 6 15 2 14 1 9 6 16 17 23 15 6 3 7 5 2 4 21 8
5 2 4 11 3 7 5 18 4 3 13 5 2 19 1 9 10 11 13 16 12 6 3 7
1 15 6 22 13 12 1 8 6 21 7 10 11 4 3 8 5 2 4 1 9 20 18 10
12 19 8 5 2 9 10 11 16 2 15 1 14 6 18 7 12 21 6 3 8 5 2 4
9 3 7 1 14 4 23 3 5 12 4 8 9 5 2 16 1 22 15 10 7 17 11 6
13 16 10 17 6 20 24 7 1 19 6 17 3 20 10 13 4 9 5 2 14 1 24 23
2 18 4 21 3 5 2 13 9 18 11 2 7 1 24 6 3 8 11 12 6 4 3 5
1 11 12 9 8 1 15 6 14 3 5 16 12 4 15 5 2 7 1 19 16 9 8 7
20 14 5 2 7 10 11 12 22 8 1 10 6 21 11 14 17 10 4 3 5 2 15 10
4 3 24 13 16 4 3 5 2 7 4 9 13 2 8 1 12 20 6 13 18 11 12 6
9 8 1 19 6 18 9 1 17 6 15 3 5 18 7 4 23 5 2 8 7 22 21 17

(d, n) = (4, 13)

[13]

Chi(C₁₃ □ C₁₃) = 13

SA algorithm

S = (4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)

```

8 1 4 5 3 7 6 10 12 11 13 9 2
7 6 10 12 11 13 9 2 8 1 4 5 3
13 9 2 8 1 4 5 3 7 6 10 12 11
4 5 3 7 6 10 12 11 13 9 2 8 1
10 12 11 13 9 2 8 1 4 5 3 7 6
2 8 1 4 5 3 7 6 10 12 11 13 9
3 7 6 10 12 11 13 9 2 8 1 4 5
11 13 9 2 8 1 4 5 3 7 6 10 12
1 4 5 3 7 6 10 12 11 13 9 2 8
6 10 12 11 13 9 2 8 1 4 5 3 7
9 2 8 1 4 5 3 7 6 10 12 11 13
5 3 7 6 10 12 11 13 9 2 8 1 4
12 11 13 9 2 8 1 4 5 3 7 6 10

```

(d, n) = (5, 5)

[35-59]

old result [35-?]

Chi(C₂₄ □ C₂₄) ≤ 59

SA algorithm

S = (5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10 11 11 11 11 11 12 12 12 12 12 13 13 13 13 13 14 14 14 14 14 15 15 15 15 15 16 16 16 16)

```

18 14 12 2 3 56 9 7 20 2 3 28 42 1 22 2 3 5 4 1 25 11 3 5
9 24 17 30 8 10 1 23 11 32 14 40 16 19 10 13 17 8 49 7 2 32 15 6
41 26 7 5 4 43 13 45 12 5 4 6 27 7 9 48 53 38 21 14 54 10 4 1
2 3 11 37 19 6 2 3 15 17 1 18 2 3 5 4 1 44 6 3 5 16 36 27
8 20 25 1 39 14 16 35 24 9 10 30 47 8 12 57 26 2 28 19 13 29 12 40
5 4 15 9 18 34 5 4 52 7 29 21 11 20 14 31 46 10 15 4 1 17 7 55
10 6 13 2 3 28 44 1 8 2 3 5 4 1 41 23 3 5 18 9 24 2 3 14
1 48 23 32 7 22 11 54 38 13 51 33 15 6 2 32 16 7 8 34 45 30 11 33
19 16 12 5 4 17 20 6 26 14 12 37 9 10 17 50 4 1 12 20 6 5 4 47
2 3 53 21 1 27 2 3 5 4 1 55 7 3 5 25 11 39 2 3 42 35 15 9
7 8 29 14 57 15 30 40 10 18 16 2 28 36 8 19 27 58 56 10 22 1 13 18
5 4 11 6 46 13 19 7 9 31 11 43 59 4 1 29 6 9 5 4 14 31 26 25
17 1 36 2 3 5 4 1 23 8 3 5 13 14 12 2 3 52 40 7 8 2 3 28
38 20 9 50 45 12 42 49 2 17 15 6 24 22 30 10 18 21 1 16 11 12 6 10
43 24 22 7 8 16 25 14 39 20 4 1 44 9 26 5 4 17 13 23 19 5 4 27
2 3 5 4 1 18 11 3 5 21 10 19 2 3 11 7 8 20 2 3 15 41 1 37
13 30 35 10 26 2 28 6 33 7 12 27 32 16 38 1 34 14 6 9 33 29 7 8
11 6 19 31 17 34 15 4 1 9 29 8 5 4 15 31 28 12 5 4 10 18 51 21
4 1 32 23 3 5 13 48 22 2 3 14 18 6 13 2 3 45 22 1 46 2 3 5
15 25 2 40 9 7 24 41 37 30 11 35 1 10 25 9 19 36 11 8 24 17 14 12
10 44 8 20 4 1 12 10 16 5 4 17 23 20 21 5 4 7 27 26 13 6 9 39
7 3 5 47 11 21 2 3 19 6 15 7 2 3 8 43 1 16 2 3 5 4 1 42
22 16 13 6 38 27 36 18 8 1 13 9 12 24 33 14 29 15 10 30 35 23 19 2
28 4 1 33 15 29 5 4 25 31 26 34 5 4 11 6 18 37 9 12 20 31 8 34

```

(d, n) = (5, 6)

[29-48]

old result [29-?]

Chi (C₂₄ □ C₂₄) ≤ 48

SA algorithm

S=(5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10
10 10 10 10 10 11 11 11 11 11 11 12 12 12 12 12 12)

```

 2  4  5  7 28 10 33  9 21  1 25 26 13 10 11  1 36 14  9  8  5  1 10 42
31 12 36 38 39  3 45 40 23 12 14  8  6 31 35  7 33  3  6 13 17 24 48  3
 8  1 16 17 13  6  5 29  2  4  3 22  5 17  2  4 23 20 18 26  2  4 11  6
15 25 19  2  4 30  1 18 20  7 11  9  1 24 21 16 15  5  1 40  7 41  9  5
20 21  3 26  9  8 35 44 10  6 41 19 28 39  3  6  8 11 12 30  3 14 22 32
 4 10  6  5 12 11 14  3 17  5 36  2  4 18 14 13  9  2  4 19  6 16  1  2
13 34 43  1 37 22  2  4 13  1 27 15 12  7  5  1 25 17 10 38  5  8 18 27
11  7 29 23 15 31  6 24  9  8 33  3  6 20 26 22 29  3 24 21 15 33 12  3
 5 14  2  4  3 10  5  7 25 21 16 23 11 10  2  4 32  6  7  1  2  4 28  6
 1 16  8 18 20 32  1 19 12  2  4  5  1  9  8 34 12  5 14 11 23  9 17 35
30 24 12  6 13 17 28 11  3  6 18 14 13 17  3 15 16 27 18 20  3 10 25 19
 4  3  9  5 36  2  4 38 15 10 22  7 31 30  6 19  1  2  4  8  6  5  7  2
26 15 21  1 27 14 16 34  5  1 29 24  2  4  5 11 10  9 36 22 12  1 13 31
 6 11 10  7 33  3  6  9  8 20 26  3 12 21 28 23  7  3 17 37 29 16 14 18
 5 17  2  4 22 12 18 23  2  4 11  6 16  1 18 14 13  6  5 15  2  4  3  8
 1 20 39 25 19  5  1 30  7 13 17  5  9  8 25  2  4 33  1 30 21 24  9 23
28 40  3  6  8 11 10 21  3 14 27 15 32 10  3 20 12 35 11 19  7  6 10 32
 4 12 14 13  9  2  4 24  6 12  1  2  4  7  6  5 26 16  8  3 27  5 34  2
16  7  5  1 26 17 31 35  5 28 18 19 22 11 29  1  9 31  2  4 13  1 22 11
 6 30 15 18 29  3 20 16 36  9  8  3 23 34 17 24 15 10  6 18 12 38 17  3
19 10  2  4 23  6  7  1  2  4 10  6  5 14  2  4  3  7  5 25 20 14  8 33
 1 44 24 41 46  5 12 13 15 11 42 38  1 16 30  8 28 21  1 39 23  2  4  5
13 27  3  8 34 14 22 32  3 17 37  7 20  9 18  6 19 22 32 11  3  6  7 35
47  9  6 11  1  2  4 19  6  5 43  2  4  3 12  5 27  2  4 16 15 37 29 18

```

(d, n) = (5, 18)

Chi (C₁₈ □ C₁₈) = 18

SA algorithm

S=(5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)

```

16  4  9 18 11  8  7 12  9 18  5  8  7 12  9 10  5 15
12  7 10  5  6  2 14  1  3 11 15 13 14  1 18 11  6  2
17  3  1 15 13  4 17 10 16  6  2  4 17  3 16  8 13 14
18 11  8 16 12  9 18  5  8  7 12  9 10  5 15  7  4  9
 5  6  2 14  7  3 11 15 13 14  1 18 11  6  2 12  1 10
15 13  4 17 10  1  6  2  4 17  3 16  8 13 14 17  3 16
 7 12  9 18  5  8 16 12  9 10  5 15  7  4  9 18 11  8
14  1  3 11 15 13 14  7 18 11  6  2 12  1 10  5  6  2
17 10 16  6  2  4 17  3  1  8 13 14 17  3 16 15 13  4
18  5  8  7 12  9 10  5 15 16  4  9 18 11  8  7 12  9
11 15 13 14  1 18 11  6  2 12  7 10  5  6  2 14  1  3
 6  2  4 17  3 16  8 13 14 17  3  1 15 13  4 17 10 16
 7 12  9 10  5 15  7  4  9 18 11  8 16 12  9 18  5  8
14  1 18 11  6  2 12  1 10  5  6  2 14  7  3 11 15 13
17  3 16  8 13 14 17  3 16 15 13  4 17 10  1  6  2  4
10  5 15  7  4  9 18 11  8  7 12  9 18  5  8 16 12  9
11  6  2 12  1 10  5  6  2 14  1  3 11 15 13 14  7 18
 8 13 14 17  3 16 15 13  4 17 10 16  6  2  4 17  3  1

```


$(d, n) = (6, 25)$

Chi ($C_{25} \square C_{25}$)=25

SA algorithm

S=(6)

24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5
10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14
2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20
19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22
15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9
23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4
6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13
5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21
14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8
20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11
22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1
9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12
4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16
13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25
21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7
8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3
11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17
1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18
12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24
16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10
25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2
7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19
3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15
17 11 20 2 25 13 6 18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23
18 1 22 19 7 21 5 24 12 9 15 3 8 14 10 16 4 23 17 11 20 2 25 13 6

Hexagonal Lattice

$(d, n) = (2, 2)$

$\text{Chi}(\mathbb{H}_c^{16,16}) = 8$

$S = (2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5)$

1	6	2	1	3	2	4	7	1	8	2	1	3	2	4	5
1	3	2	4	5	1	6	2	1	3	2	4	7	1	8	2
4	7	1	8	2	1	3	2	4	5	1	6	2	1	3	2
6	2	1	3	2	4	7	1	8	2	1	3	2	4	5	1
3	2	4	5	1	6	2	1	3	2	4	7	1	8	2	1
7	1	8	2	1	3	2	4	5	1	6	2	1	3	2	4
2	1	3	2	4	7	1	8	2	1	3	2	4	5	1	6
2	4	5	1	6	2	1	3	2	4	7	1	8	2	1	3
1	8	2	1	3	2	4	5	1	6	2	1	3	2	4	7
1	3	2	4	7	1	8	2	1	3	2	4	5	1	6	2
4	5	1	6	2	1	3	2	4	7	1	8	2	1	3	2
8	2	1	3	2	4	5	1	6	2	1	3	2	4	7	1
3	2	4	7	1	8	2	1	3	2	4	5	1	6	2	1
5	1	6	2	1	3	2	4	7	1	8	2	1	3	2	4
2	1	3	2	4	5	1	6	2	1	3	2	4	7	1	8
2	4	7	1	8	2	1	3	2	4	5	1	6	2	1	3

$(d, n) = (3, 2)$

[15-32]]

old result [15-35]

$\text{Chi}(\mathbb{H}_c^{24,24}) \leq 32$

$S = (3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18)$

21	8	5	2	25	1	13	7	6	2	10	1	14	8	6	2	27	1	23	7	5	2	11	1
2	4	1	6	3	19	2	4	1	24	3	5	2	4	1	13	3	22	2	4	1	17	3	10
15	7	9	2	14	1	5	8	17	2	30	1	31	7	9	2	5	1	6	12	8	2	18	1
2	3	1	12	4	10	2	3	1	6	4	18	2	3	1	11	4	10	2	3	1	5	4	6
13	8	5	2	6	1	11	7	9	2	5	1	12	8	6	2	20	1	16	7	9	2	29	1
2	4	1	22	3	16	2	4	1	15	3	10	2	4	1	5	3	25	2	4	1	14	3	10
6	7	9	2	32	1	5	8	21	2	6	1	14	7	9	2	19	1	6	8	5	2	11	1
2	3	1	20	4	6	2	3	1	26	4	5	2	3	1	13	4	10	2	3	1	17	4	24
15	8	5	2	10	1	13	7	9	2	17	1	11	8	6	2	5	1	12	7	9	2	18	1
2	4	1	19	3	28	2	4	1	6	3	18	2	4	1	22	3	27	2	4	1	5	3	6
14	7	9	2	6	1	5	8	23	2	10	1	5	7	9	2	16	1	6	8	21	2	10	1
2	3	1	16	4	25	2	3	1	14	4	12	2	3	1	15	4	5	2	3	1	11	4	13
6	8	12	2	10	1	11	7	9	2	6	1	30	8	13	2	10	1	20	7	9	2	5	1
2	4	1	5	3	6	2	4	1	21	3	5	2	4	1	6	3	14	2	4	1	17	3	26
18	7	9	2	15	1	13	8	17	2	10	1	24	7	9	2	5	1	19	8	6	2	10	1
2	3	1	14	4	20	2	3	1	6	4	18	2	3	1	11	4	12	2	3	1	5	4	22
11	8	5	2	6	1	19	7	9	2	5	1	8	15	6	2	10	1	23	7	9	2	13	1
2	4	1	10	3	16	2	4	1	12	3	14	2	4	1	5	3	16	2	4	1	21	3	6
12	7	9	2	27	1	5	8	11	2	6	1	22	7	9	2	25	1	6	8	14	2	5	1
2	3	1	6	4	13	2	3	1	10	4	5	2	3	1	13	4	29	2	3	1	10	4	17
18	8	15	2	14	1	23	7	9	2	21	1	17	8	6	2	11	1	5	7	9	2	6	1
2	4	1	10	3	5	2	4	1	6	3	18	2	4	1	20	3	12	2	4	1	24	3	5
7	12	9	2	6	1	8	11	26	2	5	1	7	15	9	2	19	1	6	16	8	2	13	1
2	3	1	20	4	16	2	3	1	12	4	28	2	3	1	5	4	10	2	3	1	14	4	6

$(d, n) = (3, 3)$

[11]

old result [9-13]

Chi ($H_c^{24,24}$)=11

S=(3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6)

```
9 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3 9 6 8 2 1 3 9 10 4 2 1 3
2 1 3 8 11 4 2 1 3 8 4 5 2 1 3 11 5 6 2 1 3 8 6 7
10 5 6 2 1 3 7 6 9 2 1 3 7 10 4 2 1 3 7 4 5 2 1 3
2 1 3 9 4 5 2 1 3 11 5 6 2 1 3 9 6 8 2 1 3 9 11 4
8 6 7 2 1 3 8 10 4 2 1 3 8 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3
2 1 3 11 5 6 2 1 3 7 6 9 2 1 3 7 11 4 2 1 3 7 4 5
9 10 4 2 1 3 9 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3 9 6 8 2 1 3
2 1 3 8 6 7 2 1 3 8 11 4 2 1 3 8 4 5 2 1 3 11 5 6
7 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3 7 6 9 2 1 3 7 10 4 2 1 3
2 1 3 9 11 4 2 1 3 9 4 5 2 1 3 11 5 6 2 1 3 9 6 8
10 5 6 2 1 3 8 6 7 2 1 3 8 10 4 2 1 3 8 4 5 2 1 3
2 1 3 7 4 5 2 1 3 11 5 6 2 1 3 7 6 9 2 1 3 7 11 4
9 6 8 2 1 3 9 10 4 2 1 3 9 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3
2 1 3 11 5 6 2 1 3 8 6 7 2 1 3 8 11 4 2 1 3 8 4 5
7 10 4 2 1 3 7 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3 7 6 9 2 1 3
2 1 3 9 6 8 2 1 3 9 11 4 2 1 3 9 4 5 2 1 3 11 5 6
8 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3 8 6 7 2 1 3 8 10 4 2 1 3
2 1 3 7 11 4 2 1 3 7 4 5 2 1 3 11 5 6 2 1 3 7 6 9
10 5 6 2 1 3 9 6 8 2 1 3 9 10 4 2 1 3 9 4 5 2 1 3
2 1 3 8 4 5 2 1 3 11 5 6 2 1 3 8 6 7 2 1 3 8 11 4
7 6 9 2 1 3 7 10 4 2 1 3 7 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3
2 1 3 11 5 6 2 1 3 9 6 8 2 1 3 9 11 4 2 1 3 9 4 5
8 10 4 2 1 3 8 4 5 2 1 3 10 5 6 2 1 3 8 6 7 2 1 3
2 1 3 7 6 9 2 1 3 7 11 4 2 1 3 7 4 5 2 1 3 11 5 6
```

10-coloring of $H_p^{8,8}$ was UNSAT after 1237 sekunds (4 cores).

(d,n)=(3,4) [8] old result [8-10]

Chi ($H_c^{24,24}$)=8

```
3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4
6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1
3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4
5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1
3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4
7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1
3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4
8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1
3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4
6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1
3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4
5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1
3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4
7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1
3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1 8 6 4 3 2 1 6 5 4
8 6 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 5 7 4 3 2 1 7 8 4 3 2 1
```

(d,n)=(3,5) [8] before [7-8]

Chi ($H_c^{24,24}$)=8

S=(3 3 3 3 3 4 4 4)

1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 3 5 4 1 2 5 8 7 4
5 8 4 1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 6 3 4 1 2 3
1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 3 5 4 1 2 5 7 6 4
5 7 4 1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 8 3 4 1 2 3
1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 3 5 4 1 2 5 6 8 4
5 6 4 1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 7 3 4 1 2 3
1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 3 5 4 1 2 5 8 7 4
5 8 4 1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 6 3 4 1 2 3
1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 3 5 4 1 2 5 7 6 4
5 7 4 1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 8 3 4 1 2 3
1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 3 5 4 1 2 5 6 8 4
5 6 4 1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 7 3 4 1 2 3
1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 3 5 4 1 2 5 8 7 4
5 8 4 1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 6 3 4 1 2 3
1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 3 5 4 1 2 5 7 6 4
5 7 4 1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 8 3 4 1 2 3
1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 3 5 4 1 2 5 6 8 4
5 6 4 1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 7 3 4 1 2 3
1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 3 5 4 1 2 5 8 7 4
5 8 4 1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 6 3 4 1 2 3
1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 3 5 4 1 2 5 7 6 4
5 7 4 1 2 3 5 7 4 1 2 3 7 5 4 1 2 7 8 3 4 1 2 3
1 2 3 5 8 4 1 2 3 8 5 4 1 2 8 3 5 4 1 2 5 6 8 4
5 6 4 1 2 3 5 6 4 1 2 3 6 5 4 1 2 6 7 3 4 1 2 3

7-coloring of $H_p^{12,12}$ (final lenght grid) was UNSAT.

(d,n)=(4,3) [20-46] old result [20-58]

Chi ($H_c^{24,24}$)<=46

S=(4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9 10 10 10 11 11 11 12 12 12 13 13 13 14
14 14 15 15 15 16 16 16 17 17 17 18 18)

24 28 3 9 4 10 6 33 30 16 11 2 6 25 1 3 37 20 17 15 3 5 2 1
21 7 12 2 1 36 5 3 8 4 1 7 10 14 12 9 5 35 2 4 8 11 13 6
4 5 20 3 11 15 29 13 2 9 17 3 18 28 2 1 34 7 6 10 1 3 14 2
1 8 26 6 2 4 7 1 12 24 32 6 5 4 8 3 27 16 19 33 5 38 9 22
3 25 17 10 9 19 14 5 3 2 22 23 1 15 11 9 21 2 4 1 12 18 6 7
23 16 5 1 3 27 8 6 1 4 20 7 3 2 10 26 13 6 29 3 8 2 11 4
13 2 6 12 4 18 2 21 11 9 16 5 6 12 4 14 1 17 7 24 15 5 1 3
20 8 1 7 15 34 5 3 10 13 2 1 30 8 18 3 5 2 31 4 10 6 9 14
4 5 3 35 9 2 1 14 6 7 4 3 25 37 9 1 6 11 16 12 3 1 2 28
11 17 10 6 29 4 3 8 12 24 1 15 5 2 10 4 3 19 2 8 5 22 7 21
1 8 2 13 16 1 19 5 22 2 17 11 6 8 7 23 20 13 1 15 4 18 6 3
5 4 23 3 27 7 18 6 10 3 9 4 28 1 2 14 5 6 26 3 10 9 32 30
12 25 6 36 15 11 2 8 1 33 13 5 21 40 12 3 4 11 17 8 42 1 2 14
3 20 2 31 9 4 26 14 3 39 7 2 15 6 1 9 16 27 2 24 5 4 38 7
8 10 17 21 1 5 12 2 6 1 4 11 3 10 8 5 7 29 1 34 3 9 6 11
5 4 37 6 3 7 24 41 16 9 5 17 30 18 20 2 3 4 35 15 13 2 1 22
3 28 2 1 13 8 4 10 3 23 22 2 1 19 25 12 14 11 6 5 46 7 18 16
12 19 14 15 5 11 29 2 1 6 7 4 32 3 5 9 2 43 8 1 3 4 2 6
1 3 4 2 6 27 18 3 12 5 45 8 13 15 6 1 4 31 10 17 21 9 33 5
23 8 10 7 25 1 35 4 2 9 14 1 3 2 28 7 24 3 5 2 1 20 11 26
2 1 9 5 3 44 34 20 6 38 11 17 4 5 18 12 36 16 6 14 4 30 3 13
40 22 12 4 15 2 1 8 7 3 10 21 1 6 2 27 9 1 3 8 2 7 5 39
32 2 6 17 11 3 13 5 4 9 2 23 22 26 3 7 11 5 19 29 41 10 1 3
16 8 5 1 31 14 2 19 12 1 3 15 5 8 4 13 42 2 1 6 12 9 18 4

(d,n)=(4,4) [15-25] old result [15-27]

Chi ($H_c^{20,20}$) <=25

S=(4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 10)

1 10 6 8 15 14 17 4 2 8 9 25 19 5 7 3 15 2 4 18
19 7 5 4 2 3 16 6 5 13 1 3 2 12 4 11 1 13 8 3
2 1 11 21 9 12 1 20 10 23 15 14 6 8 16 9 17 5 6 4
14 22 3 6 4 18 8 7 2 11 3 4 5 1 10 2 3 7 12 20
10 5 7 13 2 17 3 1 6 9 22 19 7 21 18 11 4 8 1 2
9 4 8 1 16 15 5 24 10 12 4 2 8 3 1 6 5 15 23 3
11 19 12 3 6 2 4 8 7 3 1 5 20 14 9 4 2 13 7 1
5 2 4 7 14 9 1 11 18 6 13 17 2 7 3 12 8 16 10 6
3 8 1 13 10 5 3 4 2 12 16 1 4 11 6 5 1 2 4 17
12 15 11 6 2 20 8 7 19 15 5 3 8 10 22 18 9 7 14 21
2 3 7 16 4 22 1 3 6 2 9 14 7 4 2 1 3 8 6 4
19 9 8 18 5 12 10 11 13 4 25 1 3 6 5 15 13 11 20 1
23 2 6 14 3 4 2 21 7 5 16 8 12 10 17 2 4 3 7 5
1 4 11 7 15 17 8 6 1 3 18 2 4 7 1 9 8 6 12 10
3 8 13 5 1 3 24 2 4 11 19 20 6 5 3 14 21 4 2 16
9 25 18 2 4 10 22 9 5 7 3 1 8 23 2 11 15 1 5 7
4 3 12 14 7 16 6 1 13 4 2 12 10 9 4 3 6 8 19 2
17 6 8 1 21 11 2 3 8 15 14 6 1 16 5 7 24 13 1 10
7 4 2 5 20 9 4 10 18 5 7 2 3 8 22 4 2 12 3 11
16 23 3 13 1 7 24 12 3 1 11 4 21 20 10 1 14 6 5 9

(d,n)=(4,5) [13-20] old result [13-21]

Chi ($H_c^{20,20}$) <=20

S=(4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7)

8 15 1 7 10 2 13 6 4 3 2 16 5 4 10 3 2 1 13 4
9 11 5 16 4 3 19 1 5 10 9 8 14 1 7 15 6 5 12 3
20 6 2 1 12 9 8 11 15 7 18 2 3 5 19 9 4 2 10 7
4 14 13 10 3 5 17 2 1 4 13 6 12 10 1 11 3 8 5 1
3 9 8 2 4 7 6 14 3 16 5 9 8 4 2 7 13 6 18 15
1 5 12 11 19 1 5 8 2 10 7 1 3 15 17 5 9 4 16 2
10 17 6 4 15 3 13 9 12 4 11 5 6 2 10 14 1 3 8 7
2 3 5 8 7 2 1 6 17 3 18 8 1 4 7 12 5 11 4 20
14 13 1 18 10 11 4 14 5 7 2 16 13 9 3 15 2 1 6 9
7 4 15 6 9 3 2 8 12 1 3 6 4 5 17 8 18 10 3 5
8 12 2 1 19 4 13 5 20 15 10 2 14 19 1 7 4 2 16 11
4 3 14 5 7 10 3 6 1 4 7 8 11 3 13 12 9 6 5 1
10 9 6 2 16 8 11 9 2 17 5 18 6 4 2 1 8 3 20 7
1 13 3 4 18 1 5 14 4 10 3 1 9 16 5 10 14 4 15 2
8 12 17 7 10 15 3 6 20 2 13 8 15 7 3 2 6 9 5 11
2 6 9 5 4 2 1 12 9 5 19 4 1 11 17 12 4 1 7 3
10 14 1 3 11 13 8 16 7 3 10 6 2 9 5 3 8 13 16 5
4 8 7 19 5 10 6 4 2 1 5 14 4 18 7 10 6 2 1 15
12 6 18 17 2 1 3 12 15 9 8 13 3 2 1 5 4 11 3 9
2 5 3 4 9 8 14 5 20 7 1 11 6 12 9 8 17 14 7 10

(d,n)=(4,6) [12-17] before [12-18]

Chi ($H_c^{12,12}$) ≤ 17

S=(4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6)

```
 1 7 11 2 3 6 4 14 12 13 8 5
 3 12 4 5 1 8 9 2 17 6 15 10
16 14 6 13 15 7 10 3 5 1 11 9
 7 2 17 3 5 11 16 12 2 4 6 8
 5 1 12 4 8 6 1 9 14 13 10 3
16 6 9 10 7 2 3 5 17 11 4 15
 8 14 3 13 11 15 4 1 12 6 2 7
 1 12 4 17 5 6 16 8 9 10 3 5
 6 2 10 9 1 7 3 2 11 13 4 15
 7 8 3 11 6 12 4 14 17 1 5 16
12 14 5 1 2 15 8 3 6 9 10 4
 6 1 9 13 16 10 7 5 1 11 2 3
```

(d,n)=(4,11) [11]

Chi ($H_c^{22,22}$)=11

10-coloring of $H_p^{24,24}$ was UNSAT.

S=(4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)

```
 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9
 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11
 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1
 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2
10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7
 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6
 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10
11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9
 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8
 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1
 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5
 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7
 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4
 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10
11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3
 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8
 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11
 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5
 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2
10 8 1 7 6 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4
 9 11 2 4 3 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6
 8 5 7 10 9 1 2 6 3 11 5 4 10 8 1 7 6 9 11 2 4 3
```

(d,n)=(5,4) [25-49] old result [25-?]

Chi ($H_c^{24,24}$) <=49

S=(5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 11 11 12 12 12 12 13 13 13 13 14 14 14 14 15 15 15 15 16 16 16 16 17)

16 2 3 5 1 11 32 4 35 7 9 12 6 22 1 2 29 27 15 21 19 20 9 4
33 10 24 17 18 6 2 37 16 1 23 3 4 10 43 30 11 39 6 8 14 3 12 1
42 8 15 4 9 14 3 20 8 31 5 2 19 18 13 7 3 4 1 5 35 2 7 13
11 3 2 1 7 25 12 10 4 34 11 15 6 1 8 16 2 9 17 10 28 23 4 6
5 29 21 22 19 6 13 2 1 27 7 33 3 4 14 20 32 12 24 15 3 18 1 16
12 10 30 47 4 45 5 3 8 17 36 9 2 21 26 5 11 1 4 8 7 31 2 9
20 8 3 2 1 11 39 18 24 4 28 12 1 22 10 13 3 2 38 27 19 6 14 4
5 7 32 15 23 9 16 10 2 6 40 3 15 8 4 7 37 41 25 34 48 3 11 1
17 33 6 26 35 4 3 7 1 20 5 11 19 2 16 18 6 9 1 4 10 2 13 36
4 3 2 1 21 12 13 8 43 42 4 30 14 1 23 3 29 5 24 8 7 22 16 49
18 8 10 27 5 11 25 2 34 6 17 9 31 8 10 4 35 2 12 44 15 14 1 9
28 7 20 29 19 14 4 1 24 3 5 46 2 13 26 7 11 1 21 3 4 6 2 40
12 4 1 2 3 9 16 8 10 18 22 4 1 27 3 6 20 32 17 8 10 13 5 11
38 30 45 6 5 23 15 12 2 7 11 28 33 36 16 5 4 9 2 19 7 1 31 3
24 8 10 17 13 41 1 4 3 6 21 14 8 2 10 39 1 12 3 22 25 4 34 2
26 1 4 3 2 37 35 32 20 5 9 1 4 3 13 15 11 18 23 6 14 16 5 9
15 6 7 27 14 11 8 16 10 2 25 17 19 40 24 5 7 4 8 2 1 47 3 12
2 18 28 5 22 1 12 3 4 7 26 29 8 6 2 1 9 3 20 10 43 13 4 33
1 8 3 21 9 2 6 48 15 5 1 11 3 4 16 27 30 12 35 6 17 7 42 29
16 10 20 4 7 36 24 13 31 23 2 14 34 22 7 38 15 21 2 1 5 3 11 19
6 2 25 5 17 11 39 44 3 4 9 12 10 6 5 13 3 4 37 14 8 46 9 12
13 15 26 3 14 1 6 16 8 7 18 33 20 19 2 1 24 36 28 23 32 31 4 40
1 41 30 4 9 2 10 27 5 15 1 11 3 4 25 16 9 12 6 18 10 7 3 34
6 8 38 7 12 19 28 3 13 21 2 17 14 8 5 7 26 3 4 1 2 5 11 22

(d,n)=(5,5) [21-37] old result [21-?]

Chi ($H_c^{24,24}$) <=37

S=(5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10 11 11 11 11 11 12 12)

13 9 10 2 14 3 31 12 23 5 4 17 13 10 1 3 14 8 18 12 4 6 1 15
32 7 16 11 8 4 21 6 2 1 3 7 32 20 5 11 2 30 24 9 33 34 5 23
4 3 19 5 1 27 13 15 10 9 14 8 22 12 6 15 4 19 1 3 26 10 14 2
12 6 29 24 2 17 3 33 5 11 18 4 2 1 3 23 37 13 5 7 17 8 21 35
36 7 25 10 22 20 4 12 1 6 19 7 16 5 29 9 10 2 27 6 4 15 1 5
18 4 3 1 5 9 8 26 2 28 3 24 17 25 31 4 8 1 12 11 3 28 2 13
14 6 11 2 16 21 7 30 13 5 4 10 1 2 6 3 14 7 20 5 22 9 23 19
5 34 32 31 15 4 3 1 23 14 9 8 12 11 5 18 15 13 2 4 16 1 8 10
4 24 1 9 17 10 6 18 27 2 22 3 7 21 4 19 1 10 17 6 25 3 7 2
20 13 3 8 2 12 5 19 29 4 15 1 6 16 2 9 3 26 27 11 5 29 15 30
6 5 14 28 7 16 1 3 11 25 10 5 13 20 14 23 8 12 4 2 1 9 18 10
2 1 22 26 21 4 6 9 24 8 2 17 3 4 18 1 5 7 24 13 3 19 8 4
12 3 11 17 10 2 13 5 14 7 1 12 28 9 11 2 10 15 6 21 14 5 16 7
6 9 5 15 8 1 3 18 23 4 10 6 5 19 8 22 3 4 17 20 2 1 23 25
13 2 14 20 4 19 27 9 11 2 15 3 13 31 16 7 1 5 9 30 11 3 4 10
24 1 3 7 16 6 12 29 5 1 17 20 21 4 2 14 10 26 6 12 19 8 5 18
28 21 11 5 10 2 13 3 4 7 8 6 9 5 11 18 25 3 13 2 1 7 15 9
2 17 26 4 8 1 18 22 24 14 2 10 3 12 28 1 8 4 5 27 16 22 3 6
1 12 14 3 25 6 9 5 15 23 1 16 4 19 7 2 15 17 9 20 10 29 4 5
23 13 7 20 10 19 2 4 3 11 8 30 9 13 5 6 24 14 3 1 2 11 18 8
9 2 4 5 16 27 1 12 7 21 17 2 20 3 1 10 4 26 12 5 7 6 15 3
21 24 17 11 3 8 9 13 5 6 14 4 18 22 7 11 2 8 9 13 19 4 10 1
22 12 28 6 18 15 4 2 10 3 1 25 29 5 15 6 23 27 1 3 16 25 14 5
3 4 20 30 5 1 7 26 19 11 16 8 2 9 28 4 21 31 5 17 7 11 2 8

(d,n)=(5,6) [19-31] old result [19-?]

Chi (Hc^{24,24})<=31

S=(5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10)

8 13 7 11 16 2 5 1 17 6 4 12 15 2 13 1 5 20 16 6 4 10 3 9
6 4 22 3 12 18 14 10 7 26 8 5 22 3 6 4 9 12 2 7 1 5 17 24
20 1 5 15 19 6 4 13 3 2 9 1 16 10 11 17 8 27 3 19 14 11 18 2
7 10 23 9 2 8 1 5 11 25 6 4 14 7 2 21 1 5 15 13 6 4 8 3
12 6 4 17 3 27 16 10 20 15 12 19 5 28 3 6 4 12 10 2 9 1 5 21
2 11 1 5 18 7 6 4 21 3 2 24 1 13 9 23 8 18 7 3 17 16 28 25
3 9 13 8 14 2 22 1 5 17 8 6 4 10 16 2 5 1 22 11 14 6 4 20
24 10 6 4 15 3 11 9 23 26 12 7 14 11 15 3 6 4 19 13 2 8 5 7
23 2 19 5 12 7 16 6 4 25 3 2 5 1 20 17 12 21 9 10 3 15 18 1
11 3 21 17 1 20 2 10 8 13 19 18 6 4 24 8 2 5 7 16 27 26 6 4
9 10 8 6 4 14 3 22 5 1 21 7 9 11 10 23 3 6 4 1 14 2 12 5
1 16 2 13 15 18 9 11 6 4 17 3 2 5 1 13 12 18 9 11 8 3 22 7
24 19 3 12 5 1 7 2 23 10 16 14 15 8 4 20 19 2 5 10 17 15 4 6
9 11 8 17 6 4 25 3 24 5 1 12 9 22 6 3 21 7 25 16 1 13 2 18
14 1 10 2 21 20 28 11 8 6 4 7 18 2 5 1 28 26 4 6 3 12 5 7
29 3 26 5 22 18 1 9 2 27 19 3 17 13 23 10 14 9 2 11 8 20 27 23
16 11 12 13 7 30 3 10 16 14 5 1 15 6 4 12 3 7 5 1 22 10 4 6
1 9 19 4 6 17 23 31 29 12 8 21 9 11 20 30 24 18 6 17 13 3 2 5
14 24 3 2 5 1 15 11 4 6 7 22 3 2 5 1 8 16 4 9 12 15 7 25
6 21 12 10 7 8 9 3 2 5 1 18 13 4 6 19 10 3 2 5 1 11 8 4
5 1 18 22 4 6 16 14 25 10 17 12 28 11 15 26 7 27 14 6 20 23 3 2
17 9 26 11 2 5 1 27 24 4 6 8 9 3 2 5 1 18 12 4 13 10 7 16
4 14 3 10 15 8 12 13 7 2 5 1 16 21 4 6 17 8 9 2 5 1 19 6
2 5 1 23 6 4 9 3 20 11 19 18 23 14 7 10 24 3 25 22 15 11 21 12

(d,n)=(5,14) [14]

Chi (Hc^{14,14})=14

S=(5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)

1 4 7 11 3 10 12 5 8 9 13 2 6 14
9 12 2 8 14 13 4 6 11 1 10 7 5 3
13 10 6 5 1 9 7 2 3 14 12 4 8 11
14 7 4 3 11 12 10 8 5 13 9 6 2 1
12 9 8 2 13 14 6 4 1 11 7 10 3 5
11 6 10 1 5 7 9 3 2 12 14 8 4 13
7 14 3 4 12 11 8 10 13 5 6 9 1 2
5 8 9 13 2 6 14 1 4 7 11 3 10 12
6 11 1 10 7 5 3 9 12 2 8 14 13 4
2 3 14 12 4 8 11 13 10 6 5 1 9 7
8 5 13 9 6 2 1 14 7 4 3 11 12 10
4 1 11 7 10 3 5 12 9 8 2 13 14 6
3 2 12 14 8 4 13 11 6 10 1 5 7 9
10 13 5 6 9 1 2 7 14 3 4 12 11 8

$(d, n) = (6, 20)$ [20]

Chi ($H_c^{20,20}$)=20

S=(6)

6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15
13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8
7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16
10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3
6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15
13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8
7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16
10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3
6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15
13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8
7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16
10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3
6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15
13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8
7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16
10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3
6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15
13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8
7 4 11 18 15 6 1 12 20 16 7 4 11 18 15 6 1 12 20 16
10 17 9 2 8 13 19 14 5 3 10 17 9 2 8 13 19 14 5 3

$(d, n) = (7, 24)$ [24]

Chi ($H_c^{24,24}$)=24

S=(7)

18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11
6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19
14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24
8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22
18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11
6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19
14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24
8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22
18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11
6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19
14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24
8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22
18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11
6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19
14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24
8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22
18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11
6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19
14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24 14 16 4 5 2 11 18 15 23 1 10 24
8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22 8 7 20 12 13 19 6 9 21 17 3 22

Triangular Lattice

$(d, n) = (1, 2)$

$\text{Chi}(T_c^{12,12}) = 6$

5-coloring of $T_p^{12,12}$ was UNSAT.

$S = (1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3)$

1	2	4	1	2	6	1	2	4	1	2	6
2	3	1	2	5	1	2	3	1	2	5	1
4	1	2	6	1	2	4	1	2	6	1	2
1	2	5	1	2	3	1	2	5	1	2	3
2	6	1	2	4	1	2	6	1	2	4	1
5	1	2	3	1	2	5	1	2	3	1	2
1	2	4	1	2	6	1	2	4	1	2	6
2	3	1	2	5	1	2	3	1	2	5	1
4	1	2	6	1	2	4	1	2	6	1	2
1	2	5	1	2	3	1	2	5	1	2	3
2	6	1	2	4	1	2	6	1	2	4	1
5	1	2	3	1	2	5	1	2	3	1	2

$(d, n) = (2, 3)$

[14-29]

before [14-?]

$\text{Chi}(T_c^{28,28}) \leq 29$

$S = (2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 7 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 10 \ 10 \ 10 \ 11 \ 11)$

11	1	3	2	15	4	8	14	1	3	2	16	4	9	6	1	3	2	7	14	19	4	1	3	2	12	9	4
3	2	8	18	17	6	1	3	2	21	7	6	12	1	3	2	4	8	6	5	1	3	2	10	16	5	26	1
6	14	7	4	1	3	2	12	5	4	9	1	3	2	5	7	15	10	1	3	2	12	8	9	7	1	3	2
23	5	1	3	2	5	9	7	10	1	3	2	11	13	8	14	1	3	2	9	11	20	6	1	3	2	4	8
1	3	2	12	6	24	13	1	3	2	6	18	5	4	1	3	2	6	5	16	4	1	3	2	5	18	6	22
2	15	4	9	10	1	3	2	4	22	23	8	1	3	2	19	9	4	12	1	3	2	7	21	4	13	1	3
5	19	6	1	3	2	16	8	6	11	1	3	2	7	6	10	5	1	3	2	8	6	5	15	1	3	2	11
4	1	3	2	21	7	4	5	1	3	2	5	4	9	12	1	3	2	11	7	13	17	1	3	2	6	9	10
3	2	8	27	5	11	1	3	2	9	7	20	6	1	3	2	4	8	6	18	1	3	2	4	12	8	5	1
14	6	7	20	1	3	2	6	17	12	4	1	3	2	14	5	16	15	1	3	2	5	10	9	11	1	3	2
16	17	1	3	2	4	9	18	14	1	3	2	10	13	8	11	1	3	2	9	4	14	6	1	3	2	24	4
1	3	2	5	12	6	10	1	3	2	19	6	25	5	1	3	2	6	7	5	12	1	3	2	19	5	6	7
2	18	9	4	13	1	3	2	5	4	8	11	1	3	2	4	9	17	10	1	3	2	20	7	8	4	1	3
10	5	6	1	3	2	23	7	15	6	1	3	2	28	21	6	12	1	3	2	8	6	11	5	1	3	2	26
12	1	3	2	11	8	22	4	1	3	2	9	7	4	24	1	3	2	5	4	13	22	1	3	2	6	15	9
3	2	4	25	7	5	1	3	2	16	12	13	5	1	3	2	8	7	18	6	1	3	2	9	10	21	17	1
5	6	8	28	1	3	2	6	9	5	29	1	3	2	6	10	5	4	1	3	2	15	5	4	16	1	3	2
13	11	1	3	2	15	4	10	14	1	3	2	26	8	17	15	1	3	2	11	9	14	7	1	3	2	8	4
1	3	2	20	5	9	17	1	3	2	7	6	4	20	1	3	2	16	6	19	5	1	3	2	6	12	5	27
2	29	7	10	16	1	3	2	5	8	11	27	1	3	2	14	7	9	13	1	3	2	4	8	24	11	1	3
6	9	5	1	3	2	21	7	13	12	1	3	2	18	5	6	4	1	3	2	23	12	6	10	1	3	2	18
15	1	3	2	4	14	8	6	1	3	2	4	15	10	9	1	3	2	5	8	4	7	1	3	2	5	4	7
3	2	8	22	6	12	1	3	2	19	9	6	5	1	3	2	11	12	22	10	1	3	2	9	17	13	6	1
14	5	4	23	1	3	2	5	11	4	24	1	3	2	16	7	21	25	1	3	2	6	5	15	4	1	3	2
12	16	1	3	2	13	7	18	15	1	3	2	14	8	23	6	1	3	2	4	9	18	14	1	3	2	28	8
1	3	2	6	10	5	9	1	3	2	6	5	7	4	1	3	2	5	8	6	7	1	3	2	20	6	5	21
2	4	9	7	19	1	3	2	4	8	17	10	1	3	2	12	9	4	17	1	3	2	13	4	8	7	1	3
25	6	5	1	3	2	11	6	20	5	1	3	2	22	11	5	13	1	3	2	15	5	11	6	1	3	2	10

(d,n)=(2,4) [12-14] old result [10-16]

Chi ($T_c^{14,14}$) ≤ 14 **SAT solver**
S=(2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5)

6 8 2 4 3 1 10 6 8 2 4 3 1 9
2 4 3 1 11 7 5 2 4 3 1 12 7 5
3 1 10 12 6 2 4 3 1 9 11 6 2 4
8 11 7 2 4 3 1 8 12 7 2 4 3 1
14 2 4 3 1 5 9 14 2 4 3 1 5 10
4 3 1 6 8 13 2 4 3 1 6 8 13 2
1 7 5 9 2 4 3 1 7 5 10 2 4 3
6 8 2 4 3 1 10 6 8 2 4 3 1 9
2 4 3 1 11 7 5 2 4 3 1 12 7 5
3 1 10 12 6 2 4 3 1 9 11 6 2 4
8 11 7 2 4 3 1 8 12 7 2 4 3 1
13 2 4 3 1 5 9 13 2 4 3 1 5 10
4 3 1 6 8 14 2 4 3 1 6 8 14 2
1 7 5 9 2 4 3 1 7 5 10 2 4 3

10-coloring of $T_p^{12,12}$ was UNSAT and 11-coloring of $T_p^{14,14}$ was UNSAT (10815 seconds, 4 cores).

(d,n)=(2,5) [10-11] old result [9-13]

Chi ($T_c^{14,14}$) ≤ 11
S=(2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4)

1 2 3 10 7 5 4 1 2 3 6 7 5 4
3 7 8 5 4 1 2 3 11 9 5 4 1 2
6 5 4 1 2 3 9 10 5 4 1 2 3 9
4 1 2 3 6 11 5 4 1 2 3 10 8 5
2 3 10 9 5 4 1 2 3 8 7 5 4 1
7 11 5 4 1 2 3 7 6 5 4 1 2 3
5 4 1 2 3 8 10 5 4 1 2 3 6 9
1 2 3 6 7 5 4 1 2 3 9 10 5 4
3 10 8 5 4 1 2 3 11 8 5 4 1 2
7 5 4 1 2 3 9 6 5 4 1 2 3 8
4 1 2 3 11 10 5 4 1 2 3 7 6 5
2 3 6 9 5 4 1 2 3 10 9 5 4 1
9 11 5 4 1 2 3 7 8 5 4 1 2 3
5 4 1 2 3 8 6 5 4 1 2 3 8 10

9-coloring of $T_p^{12,12}$ was UNSAT.

(d,n)=(2,6) [9] old result [8-10]

Chi ($T_c^{22,22}$)=9

S=(2 2 2 2 2 2 3 3 3)

1 5 3 9 2 4 6 1 5 8 3 2 4 8 6 1 5 3 2 7 4 6
9 4 6 1 5 3 8 2 4 6 1 5 7 3 2 4 7 6 1 5 3 2
5 3 2 8 4 6 1 5 3 7 2 4 6 1 5 9 3 2 4 9 6 1
8 6 1 5 3 2 7 4 6 1 5 3 9 2 4 6 1 5 8 3 2 4
3 2 4 7 6 1 5 3 2 9 4 6 1 5 3 8 2 4 6 1 5 7
1 5 9 3 2 4 9 6 1 5 3 2 8 7 6 1 5 3 7 2 4 6
2 4 6 1 5 8 3 2 4 8 7 1 5 3 2 4 9 6 1 5 3 9
5 8 3 2 4 6 1 7 5 3 2 4 6 9 1 5 3 2 4 8 6 1
7 6 1 5 7 3 2 4 6 1 9 5 3 2 4 6 8 1 5 3 2 4
3 2 4 9 6 1 5 9 3 2 4 6 1 8 5 3 2 4 6 7 1 5
9 1 5 3 2 4 8 6 1 5 8 3 2 4 6 1 7 5 3 2 4 6
2 4 6 8 1 5 3 2 4 7 6 1 5 7 3 2 4 6 1 9 5 3
8 7 3 2 4 6 7 1 5 3 2 4 9 6 1 5 9 3 2 4 6 1
4 6 1 5 9 3 2 4 6 9 1 5 3 2 4 8 6 1 5 8 7 2
3 9 2 4 6 1 5 8 3 2 4 6 8 1 5 3 2 7 4 6 1 5
6 1 5 3 8 2 4 6 1 5 7 3 2 4 7 6 1 5 3 2 9 4
2 8 7 6 1 5 3 7 2 4 6 1 5 9 3 2 4 9 6 1 5 3
1 5 3 2 4 9 6 1 5 9 3 2 4 6 1 5 8 3 2 4 8 7
4 6 9 1 5 3 2 4 8 6 1 5 8 3 2 4 6 1 7 5 3 2
5 3 2 4 6 8 1 5 3 2 4 7 6 1 5 7 3 2 4 6 1 9
6 1 8 7 3 2 4 6 7 1 5 3 2 9 4 6 1 5 9 3 2 4
7 2 4 6 1 5 9 3 2 4 9 6 1 5 3 2 8 4 6 1 5 8

8-coloring of $T_p^{12,12}$ was UNSAT.

(d,n)=(2,7) [7]

Chi ($T_c^{14,14}$)=7

S=(2 2 2 2 2 2 2)

6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5
7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4
2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6
1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7
3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2
5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1
4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3
6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5
7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4
2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6
1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7
3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2
5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3 4 7 1
4 7 1 5 6 2 3 4 7 1 5 6 2 3

(d, n) = (3, 4) [28-65] old result [28-72]

Chi ($T_c^{24,24}$) <= 65

S=(3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 11 11 12 12 12 12 13 13 13 13 14 14 14 14 15 15 15 15 16 16 16 16 17 17 17 17 18 18 18 18 19)

3 12 30 4 24 17 3 16 19 4 46 15 3 28 12 4 5 17 3 16 19 4 22 14
10 13 1 41 6 2 11 7 1 10 6 2 5 40 1 10 44 2 8 6 1 11 7 2
23 4 9 43 3 5 14 4 29 8 3 9 37 4 7 22 3 9 20 4 29 5 3 35
1 6 18 2 8 38 1 22 13 2 12 20 1 14 8 2 34 27 1 15 21 2 39 28
8 17 3 11 7 4 10 52 3 42 5 4 11 17 3 16 6 4 11 7 3 10 24 4
12 2 5 16 1 20 47 2 9 15 1 62 7 2 25 13 1 19 5 2 18 14 1 9
3 7 58 4 33 21 3 12 6 4 18 31 3 6 24 4 12 32 3 54 8 4 13 6
11 63 1 10 14 2 32 5 1 7 23 2 8 61 1 5 15 2 10 23 1 26 16 2
5 4 37 19 3 9 13 4 8 27 3 19 10 4 9 49 3 8 7 4 9 17 3 45
1 8 22 2 46 6 1 36 24 2 28 14 1 12 21 2 35 43 1 36 6 2 12 7
10 15 3 40 31 4 11 7 3 25 16 4 5 26 3 7 50 4 11 20 3 5 30 4
25 2 6 20 1 5 8 2 15 48 1 9 44 2 13 6 1 16 18 2 41 33 1 38
3 42 21 4 7 16 3 29 12 4 6 39 3 20 11 4 17 5 3 12 14 4 55 8
11 24 1 14 23 2 10 34 1 18 5 2 7 30 1 8 22 2 10 27 1 7 13 2
16 4 18 5 3 28 35 4 9 51 3 8 64 4 45 15 3 9 29 4 8 6 3 9
1 12 7 2 8 13 1 6 26 2 14 17 1 56 10 2 12 7 1 40 28 2 15 5
10 17 3 6 19 4 11 49 3 7 43 4 11 23 3 5 19 4 6 34 3 11 23 4
48 2 44 60 1 9 15 2 5 8 1 22 6 2 9 16 1 37 14 2 5 31 1 59
3 22 8 4 65 27 3 12 50 4 41 20 3 12 7 4 33 21 3 8 13 4 12 7
6 14 1 11 20 2 10 32 1 16 24 2 10 5 1 8 42 2 11 24 1 10 18 2
19 4 5 13 3 7 39 4 14 6 3 9 19 4 15 38 3 6 32 4 7 17 3 9
1 36 21 2 12 6 1 5 8 2 57 7 1 36 31 2 18 25 1 5 26 2 20 16
11 8 3 10 15 4 18 23 3 11 13 4 53 8 3 11 14 4 10 12 3 15 6 4
5 2 7 25 1 9 26 2 45 33 1 21 30 2 6 47 1 7 13 2 9 8 1 27

(d, n) = (3, 5) [20-34] old result [20-38]

Chi ($T_c^{24,24}$) <= 34

S=(3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9)

8 1 21 9 3 25 8 1 18 7 3 21 9 1 20 19 3 30 12 1 15 10 3 20
4 5 26 2 11 12 4 5 10 2 23 8 4 5 13 2 14 10 4 5 8 2 22 13
9 6 3 16 19 1 22 15 3 24 30 1 11 10 3 16 8 1 23 11 3 24 7 1
12 2 15 7 4 5 6 2 20 9 4 5 14 2 12 6 4 5 7 2 9 6 4 5
3 11 10 1 31 8 3 17 7 1 13 6 3 25 7 1 28 26 3 17 13 1 14 19
27 8 4 5 18 2 9 10 4 5 8 2 19 15 4 5 9 2 22 21 4 5 10 2
16 1 17 23 3 24 13 1 29 28 3 12 16 1 17 8 3 18 10 1 12 8 3 15
4 5 9 2 14 6 4 5 11 2 21 26 4 5 10 2 13 24 4 5 6 2 25 7
18 6 3 21 7 1 20 12 3 15 6 1 18 7 3 11 27 1 14 7 3 29 9 1
11 2 12 10 4 5 8 2 16 7 4 5 14 2 9 6 4 5 20 2 16 19 4 5
3 14 8 1 13 15 3 9 22 1 19 8 3 13 23 1 32 12 3 9 8 1 13 10
17 20 4 5 26 2 11 25 4 5 27 2 17 20 4 5 8 2 15 10 4 5 23 2
15 1 7 9 3 19 6 1 18 10 3 30 9 1 34 10 3 19 7 1 6 11 3 12
4 5 6 2 24 16 4 5 14 2 13 6 4 5 24 2 25 16 4 5 21 2 33 31
9 8 3 30 22 1 10 7 3 12 8 1 11 7 3 12 6 1 28 17 3 18 14 1
25 2 10 11 4 5 8 2 20 9 4 5 15 2 14 8 4 5 11 2 9 26 4 5
3 19 13 1 18 14 3 15 21 1 17 28 3 26 33 1 18 13 3 29 8 1 10 20
16 6 4 5 29 2 9 23 4 5 6 2 19 16 4 5 9 2 15 27 4 5 7 2
11 1 12 7 3 17 6 1 13 11 3 10 7 1 22 6 3 23 7 1 30 6 3 22
4 5 9 2 15 8 4 5 7 2 31 14 4 5 13 2 20 17 4 5 10 2 24 13
14 8 3 10 28 1 20 16 3 25 8 1 12 9 3 11 10 1 21 8 3 12 9 1
15 2 23 32 4 5 11 2 19 10 4 5 18 2 15 8 4 5 14 2 16 19 4 5
3 18 6 1 27 13 3 9 12 1 22 6 3 24 27 1 29 7 3 9 6 1 11 7
17 10 4 5 7 2 14 6 4 5 15 2 17 7 4 5 6 2 25 18 4 5 28 2

(d, n) = (3, 6) [17-24] old result [17-26]

Chi ($T_c^{24,24}$) ≤ 24

S = (3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6)

15 3 21 19 4 5 14 3 15 21 4 5 10 3 23 19 4 5 10 3 14 9 4 5
2 6 9 1 13 24 2 6 10 1 17 9 2 6 11 1 22 9 2 6 11 1 18 10
17 11 4 5 10 3 16 9 4 5 11 3 18 12 4 5 16 3 13 20 4 5 12 3
7 1 14 23 2 6 11 1 12 7 2 6 14 1 15 8 2 6 12 1 15 8 2 6
4 5 8 3 18 7 4 5 20 3 19 8 4 5 7 3 17 10 4 5 7 3 19 22
13 9 2 6 12 1 17 8 2 6 13 1 16 10 2 6 9 1 14 11 2 6 16 1
10 3 15 20 4 5 9 3 15 10 4 5 9 3 22 11 4 5 18 3 21 9 4 5
2 6 11 1 16 10 2 6 14 1 18 11 2 6 12 1 13 19 2 6 8 1 23 12
14 8 4 5 7 3 13 11 4 5 12 3 17 7 4 5 8 3 16 7 4 5 17 3
7 1 18 21 2 6 8 1 19 7 2 6 8 1 14 15 2 6 10 1 12 15 2 6
4 5 9 3 17 12 4 5 22 3 16 9 4 5 10 3 18 9 4 5 11 3 13 10
22 11 2 6 10 1 14 9 2 6 10 1 13 23 2 6 11 1 17 24 2 6 9 1
16 3 12 19 4 5 11 3 15 18 4 5 11 3 20 19 4 5 7 3 14 20 4 5
2 6 8 1 13 20 2 6 7 1 12 8 2 6 7 1 16 12 2 6 8 1 18 7
21 23 4 5 7 3 16 8 4 5 17 3 21 24 4 5 8 3 13 22 4 5 10 3
11 1 14 10 2 6 9 1 23 10 2 6 14 1 15 9 2 6 10 1 15 9 2 6
4 5 9 3 18 11 4 5 12 3 13 9 4 5 10 3 17 18 4 5 11 3 16 12
19 8 2 6 12 1 15 21 2 6 11 1 19 7 2 6 11 1 14 21 2 6 7 1
13 3 17 7 4 5 8 3 14 7 4 5 8 3 16 12 4 5 7 3 12 8 4 5
2 6 15 1 16 22 2 6 10 1 18 24 2 6 20 1 13 8 2 6 9 1 23 18
14 9 4 5 10 3 13 19 4 5 9 3 15 10 4 5 9 3 22 10 4 5 17 3
10 1 11 20 2 6 9 1 11 12 2 6 17 1 14 11 2 6 15 1 19 11 2 6
4 5 8 3 12 18 4 5 7 3 16 8 4 5 12 3 18 21 4 5 16 3 13 7
12 22 2 6 7 1 23 8 2 6 20 1 13 7 2 6 8 1 17 7 2 6 8 1

(d, n) = (3, 12) [12]

Chi ($T_c^{12,12}$) = 12

S = (3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)

4 5 12 3 8 10 4 5 12 3 8 10
6 9 1 7 11 2 6 9 1 7 11 2
12 3 8 10 4 5 12 3 8 10 4 5
1 7 11 2 6 9 1 7 11 2 6 9
8 10 4 5 12 3 8 10 4 5 12 3
11 2 6 9 1 7 11 2 6 9 1 7
4 5 12 3 8 10 4 5 12 3 8 10
6 9 1 7 11 2 6 9 1 7 11 2
12 3 8 10 4 5 12 3 8 10 4 5
1 7 11 2 6 9 1 7 11 2 6 9
8 10 4 5 12 3 8 10 4 5 12 3
11 2 6 9 1 7 11 2 6 9 1 7

(d, n) = (4, 19) [19]

Chi ($T_c^{19,19}$)=19

S=(4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)

10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12
2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9
5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16
15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1
11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17
8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7
18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13
3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6
12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19
9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4
16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14
1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10
17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2
7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5
13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15
6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11
19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8
4 9 2 17 11 6 3 14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18
14 16 5 7 8 19 12 10 1 15 13 18 4 9 2 17 11 6 3

(d, n) = (5, 27) [27]

Chi ($T_c^{27,27}$)=27

S=(5)

3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5
21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9
25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19
8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23
14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4
20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6
27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16
7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18
10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22
3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5
21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9
25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19
8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23
14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4
20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6
27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16
7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18
10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22
3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5
21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9
25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19
8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23
14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4
20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6
27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16 27 15 5 3 24 23 8 1 16
7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18 7 12 9 21 17 4 14 26 18
10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22 10 2 19 25 13 6 20 11 22

(d, n) = (6, 37) [37]

$(d, n) = (1, 4)$ [4]

$\text{Chi}(C_{18} \boxtimes C_{18}) = 4$

$S = (1, 1, 1, 1)$

4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3

$(d, n) = (2, 4)$ [18-31]

$\text{Chi}(C_{24} \boxtimes C_{24}) \leq 31$

$S = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9)$

11	6	3	15	9	3	11	22	3	8	9	3	12	15	3	6	22	3	10	15	3	8	9	3
7	1	21	16	1	8	5	1	7	16	1	6	7	1	17	16	1	12	5	1	7	16	1	17
2	20	4	2	18	4	2	17	4	2	30	4	2	18	4	2	7	4	2	11	4	2	5	4
10	8	3	14	7	3	12	6	3	14	5	3	11	8	3	9	29	3	26	6	3	14	19	3
23	1	13	6	1	10	24	1	13	8	1	10	25	1	13	6	1	8	24	1	13	8	1	6
7	2	4	11	2	4	5	2	4	9	2	4	7	2	4	19	2	4	5	2	4	18	2	4
3	12	5	3	9	15	3	19	7	3	20	15	3	21	5	3	7	15	3	10	12	3	5	15
1	8	16	1	7	8	1	6	16	1	5	6	1	8	12	1	16	11	1	6	7	1	11	9
10	4	2	6	4	2	12	4	2	8	4	2	11	4	2	6	4	2	9	4	2	8	4	2
7	3	17	20	3	10	5	3	14	17	3	10	7	3	14	23	3	17	5	3	14	21	3	6
1	13	5	1	18	21	1	11	7	1	13	18	1	9	5	1	7	8	1	13	20	1	5	19
4	8	2	4	7	2	4	6	2	4	5	2	4	8	2	4	10	2	4	6	2	4	12	2
11	3	14	6	3	8	15	3	9	8	3	6	12	3	15	6	3	12	11	3	7	8	3	15
7	22	1	9	16	1	5	12	1	22	16	1	7	11	1	19	16	1	5	18	1	10	9	1
2	25	4	2	10	4	2	19	4	2	10	4	2	20	4	2	7	4	2	26	4	2	5	4
3	8	5	3	7	23	3	6	7	3	5	14	3	8	5	3	9	8	3	6	14	3	16	6
13	1	12	6	1	8	13	1	11	8	1	6	13	1	24	6	1	17	13	1	7	8	1	29
7	4	2	31	4	2	5	4	2	17	4	2	7	4	2	10	4	2	5	4	2	12	4	2
17	3	15	11	3	14	9	3	15	12	3	9	25	3	15	12	3	11	21	3	15	23	3	9
1	20	5	1	18	7	1	10	16	1	5	18	1	8	5	1	16	8	1	6	10	1	11	19
4	6	2	4	24	2	4	8	2	4	21	2	4	6	2	4	19	2	4	7	2	4	8	2
7	28	3	8	12	3	5	27	3	6	7	3	14	23	3	7	9	3	5	27	3	14	5	3
30	1	10	13	1	6	19	1	20	13	1	11	10	1	28	13	1	31	20	1	18	13	1	12
4	2	5	4	7	2	4	26	2	4	5	2	4	8	5	4	2	8	4	2	6	4	2	25

$(d, n) = (2, 5)$ [14-19]

Chi (C₁₈ ⊠ C₁₈) ≤ 19

S=(2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5)

```

18 5 1 9 3 8 15 5 1 8 10 1 7 5 4 6 3 1
 2 8 19 2 11 4 10 6 4 2 3 6 17 3 1 10 5 11
16 3 4 6 5 1 2 3 9 14 5 4 2 15 19 2 9 4
 7 5 1 12 3 7 17 5 1 11 12 1 9 5 4 8 3 1
 2 13 9 2 14 4 16 8 4 2 3 8 16 3 1 12 5 6
10 3 4 8 5 1 2 3 6 7 5 4 2 7 10 2 14 4
17 5 1 6 3 18 10 5 1 13 10 1 6 5 4 18 3 1
 2 11 7 2 15 4 19 9 4 2 3 9 17 3 1 9 5 8
16 3 4 9 5 1 2 3 12 8 5 4 2 8 11 2 6 4
19 5 1 14 3 8 7 5 1 11 7 1 15 5 4 7 3 1
 2 12 13 2 6 4 16 10 4 2 3 10 6 3 1 10 5 15
 8 3 4 10 5 1 2 3 6 14 5 4 2 12 9 2 14 4
 6 5 1 18 3 17 9 5 1 13 9 1 8 5 4 13 3 1
 2 9 7 2 8 4 15 7 4 2 3 7 16 3 1 7 5 17
16 3 4 11 5 1 2 3 8 10 5 4 2 10 6 2 11 4
 8 5 1 13 3 10 6 5 1 11 6 1 15 5 4 9 3 1
 2 10 6 2 14 4 12 9 4 2 3 9 12 3 1 14 5 12
15 3 4 7 5 1 2 3 7 13 5 4 2 8 13 2 7 4

```

(d,n)=(2,6) [12]

Chi (C₁₂ ⊠ C₁₂) = 12

S=(2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3)

```

1 9 12 1 3 9 10 3 1 9 12 3
4 7 6 4 8 6 4 11 6 4 10 6
5 2 10 5 2 7 5 2 8 5 2 11
8 1 3 11 1 3 12 1 3 7 1 3
9 6 12 4 9 6 10 4 9 6 12 4
5 7 2 5 8 2 5 11 2 5 10 2
3 1 10 3 1 7 3 1 8 3 1 11
8 4 6 11 4 6 12 4 6 7 4 6
2 9 12 5 2 9 10 2 5 9 12 5
1 7 3 1 8 3 1 11 3 1 10 3
6 4 10 6 4 7 6 4 8 6 4 11
8 2 5 11 2 5 12 2 5 7 2 5

```

(d,n)=(2,7) [11]

Chi (C₁₂ ⊠ C₁₂) = 11

S=(2 2 2 2 2 3 3 3 3)

```

1 3 7 8 6 4 1 8 5 1 6 8
2 6 9 2 3 7 9 3 7 2 9 4
5 11 4 1 5 11 2 6 4 11 3 7
1 3 7 10 6 4 1 10 5 1 6 10
2 6 8 2 3 7 8 3 7 2 8 4
5 9 4 1 5 9 2 6 4 9 3 7
1 3 7 11 6 4 1 11 5 1 6 11
2 6 10 2 3 7 10 3 7 2 10 4
5 8 4 1 5 8 2 6 4 8 3 7
1 3 7 9 6 4 1 9 5 1 6 9
2 6 11 2 3 7 11 3 7 2 11 4
5 10 4 1 5 10 2 6 4 10 3 7

```

$(d, n) = (2, 8)$ [11]

For 11-coloring the construction of $(d, n) = (2, 7)$ can be used.

10-coloring of $P_{12} \boxtimes P_{12}$ was UNSAT after 2910 sekunds (4 cores).

$(d, n) = (2, 9)$ [9]

Chi ($C_{12} \boxtimes C_{12}$) = 9

s=(2 2 2 2 2 2 2 2 2)

```

7 4 3 7 4 3 7 4 3 7 4 3
6 1 8 6 1 8 6 1 8 6 1 8
2 9 5 2 9 5 2 9 5 2 9 5
7 4 3 7 4 3 7 4 3 7 4 3
6 8 1 6 8 1 6 8 1 6 8 1
5 2 9 5 2 9 5 2 9 5 2 9
3 4 7 3 4 7 3 4 7 3 4 7
8 6 1 8 6 1 8 6 1 8 6 1
5 2 9 5 2 9 5 2 9 5 2 9
7 4 3 7 4 3 7 4 3 7 4 3
1 8 6 1 8 6 1 8 6 1 8 6
2 9 5 2 9 5 2 9 5 2 9 5

```

$(d, n) = (3, 7)$ [26-59]

Chi ($C_{18} \boxtimes C_{18}$) <= 59

s=(3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7
7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10 10 10 11 11 11)

```

26 12 11 1 21 4 12 11 3 15 6 12 3 17 6 15 3 36
2 17 35 15 7 16 57 26 7 9 2 16 7 13 2 5 22 16
4 33 52 9 3 20 6 1 10 18 4 1 35 10 4 18 21 14
43 5 6 18 2 8 24 31 13 5 21 33 11 40 24 1 7 31
8 39 1 10 47 14 4 17 22 3 8 44 6 3 9 19 6 3
23 59 13 29 7 5 32 34 2 7 14 29 2 5 20 32 2 11
42 12 4 28 21 3 12 48 6 9 28 1 15 12 27 34 4 41
14 5 9 6 2 16 37 1 36 5 25 16 55 7 38 37 10 7
3 1 53 27 11 38 54 20 4 11 39 18 4 6 3 1 21 6
15 50 30 7 35 5 10 23 2 19 3 30 13 5 8 26 2 36
56 25 17 19 4 13 3 7 17 6 21 10 35 14 9 19 11 46
13 33 2 22 8 6 31 1 14 8 33 7 2 20 17 7 45 5
4 10 3 14 21 18 15 24 26 4 22 1 15 4 40 31 3 18
6 7 12 11 16 5 2 12 11 5 16 28 12 5 29 1 16 24
49 20 1 28 29 4 34 20 3 9 6 18 3 13 6 8 21 58
2 41 32 42 9 7 10 1 13 7 2 10 32 7 2 14 34 5
13 4 19 27 3 8 6 17 23 4 8 1 27 4 19 11 23 37
7 10 6 5 30 14 2 5 19 25 14 5 30 20 9 1 25 51

```

$(d, n) = (3, 8)$ [23-45]

Chi(C₁₈ ⊠ C₁₈) ≤ 45

S=(3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8)
9 32 16 5 4 12 22 29 4 34 6 12 25 7 38 2 8 7
6 10 13 3 15 9 18 5 11 21 1 5 3 36 6 13 15 3
18 2 27 7 14 2 10 16 7 2 27 17 4 33 10 5 24 14
1 11 35 8 6 17 31 3 13 14 19 9 18 26 1 16 4 17
12 5 4 33 30 23 26 8 32 15 6 8 22 7 2 8 31 7
6 20 16 3 1 5 24 12 1 5 20 3 12 11 6 3 9 23
22 15 21 9 2 7 22 4 11 7 28 23 4 13 15 30 19 34
2 29 8 45 14 6 10 3 21 29 2 10 1 5 21 37 10 14
44 5 4 11 38 25 8 16 9 6 8 17 16 7 8 24 4 7
13 32 12 1 19 13 15 34 1 5 19 3 18 6 25 3 1 6
18 3 28 7 36 5 4 27 31 14 4 33 22 9 2 27 11 17
15 23 9 20 6 3 18 7 24 20 13 11 1 5 36 20 41 16
4 2 10 35 22 2 8 10 12 2 8 7 10 15 4 7 43 5
31 26 1 33 21 16 1 30 6 3 21 26 28 12 8 42 1 39
8 7 13 5 4 15 11 23 9 4 16 17 6 23 2 13 40 24
30 14 6 3 37 17 14 5 32 19 1 5 18 3 37 19 6 3
4 11 2 19 8 7 2 13 8 7 2 14 22 9 4 16 5 34
12 1 20 28 25 1 6 3 20 24 15 35 8 11 20 1 21 29

(d,n)=(3,9) [21-39]

Chi(C₁₈ ⊠ C₁₈) ≤ 39

S=(3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7)
23 38 24 5 8 37 36 1 4 7 16 5 14 10 24 35 21 7
8 2 39 19 4 2 6 34 8 18 26 20 32 3 6 11 30 34
15 18 9 27 16 35 9 5 28 2 6 9 4 15 18 9 4 5
6 28 33 10 11 12 29 14 24 19 17 31 12 2 8 19 26 3
12 22 1 3 7 15 1 25 7 11 1 13 5 7 1 17 29 16
7 14 8 13 2 6 8 3 10 21 8 3 16 22 14 27 13 2
5 4 9 21 5 17 9 22 5 18 9 4 23 10 11 4 9 24
15 18 31 19 26 4 23 16 2 6 15 20 2 6 18 3 8 6
1 25 10 3 1 7 12 14 1 7 17 12 1 7 5 21 30 20
12 11 16 6 8 15 11 3 8 13 19 3 8 25 26 17 2 7
23 22 5 9 13 20 5 9 10 4 5 9 16 4 14 9 13 4
8 14 2 17 4 24 2 18 6 21 2 11 6 10 32 3 6 29
27 1 18 21 7 1 28 16 7 1 15 24 7 1 18 5 34 24
7 3 10 6 8 3 23 12 8 14 3 20 8 12 2 37 19 28
12 33 16 5 26 11 27 5 4 9 29 5 4 31 17 15 4 11
8 2 25 15 4 32 2 6 10 19 2 6 23 22 3 6 26 20
9 22 17 1 14 9 30 17 25 33 11 13 27 9 25 16 5 36
3 6 31 7 3 20 13 22 15 3 21 1 8 7 2 1 13 14

(d,n)=(3,16) [16]

Chi(C₁₆ ⊠ C₁₆) = 16

S=(3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
6 11 16 4 6 2 10 4 14 11 7 4 14 11 1 9
12 5 1 13 12 11 1 13 3 5 16 9 3 5 16 8
3 15 10 8 3 15 7 8 12 15 1 8 12 15 10 4
14 2 7 9 14 5 16 9 6 2 10 13 6 2 7 13
6 11 16 4 6 2 10 4 14 11 7 4 14 11 1 9
12 5 1 13 12 11 1 13 3 5 16 9 3 5 16 8
3 15 10 8 3 15 7 8 12 15 1 8 12 15 10 4
14 2 7 9 14 5 16 9 6 2 10 13 6 2 7 13
6 11 16 4 6 2 10 4 14 11 7 4 14 11 1 9
12 5 1 13 12 11 1 13 3 5 16 9 3 5 16 8
3 15 10 8 3 15 7 8 12 15 1 8 12 15 10 4
14 2 7 9 14 5 16 9 6 2 10 13 6 2 7 13
6 11 16 4 6 2 10 4 14 11 7 4 14 11 1 9
12 5 1 13 12 11 1 13 3 5 16 9 3 5 16 8
3 15 10 8 3 15 7 8 12 15 1 8 12 15 10 4
14 2 7 9 14 5 16 9 6 2 10 13 6 2 7 13

$(d, n) = (4, 25)$

[25]

$\chi(C_{25} \boxtimes C_{25}) = 25$

$S = (4, 4)$

9 17 22 2 12 9 17 22 2 8 13 24 22 2 8 13 17 22 2 18 9 16 22 2 12
19 16 10 6 8 21 1 20 15 12 21 1 20 15 4 19 7 14 25 4 13 7 5 25 23
21 7 14 25 4 19 24 10 6 4 19 7 14 25 23 9 1 10 11 23 19 1 10 11 8
3 24 20 11 18 3 7 14 25 18 9 16 5 11 12 3 24 20 15 8 3 24 14 15 18
13 1 5 15 23 13 16 5 11 23 3 17 10 6 18 21 16 5 6 12 21 17 20 6 4
9 17 2 22 12 9 17 2 22 8 13 24 2 22 8 13 17 2 22 18 9 16 2 22 12
19 16 10 6 8 21 1 20 15 12 21 1 20 15 4 19 7 14 25 4 13 7 5 25 23
21 7 14 25 4 19 24 10 6 4 19 7 14 25 23 9 1 10 11 23 19 1 10 11 8
3 24 20 11 18 3 7 14 25 18 9 16 5 11 12 3 24 20 15 8 3 24 14 15 18
13 1 5 15 23 13 16 5 11 23 3 17 10 6 18 21 16 5 6 12 21 17 20 6 4
9 17 2 22 12 9 17 2 22 8 13 24 2 22 8 13 17 2 22 18 9 16 2 22 12
19 16 10 6 8 21 1 20 15 12 21 1 20 15 4 19 7 14 25 4 13 7 5 25 23
21 7 14 25 4 19 24 10 6 4 19 7 14 25 23 9 1 10 11 23 19 1 10 11 8
3 24 20 11 18 3 7 14 25 18 9 16 5 11 12 3 24 20 15 8 3 24 14 15 18
13 1 5 15 23 13 16 5 11 23 3 17 10 6 18 21 16 5 6 12 21 17 20 6 4
9 17 22 2 12 9 17 22 2 8 13 24 22 2 8 13 17 22 2 18 9 16 22 2 12
19 16 10 6 8 21 1 20 15 12 21 1 20 15 4 19 7 14 25 4 13 7 5 25 23
21 7 14 25 4 19 24 10 6 4 19 7 14 25 23 9 1 10 11 23 19 1 10 11 8
3 24 20 11 18 3 7 14 25 18 9 16 5 11 12 3 24 20 15 8 3 24 14 15 18
13 1 5 15 23 13 16 5 11 23 3 17 10 6 18 21 16 5 6 12 21 17 20 6 4
9 17 22 2 12 9 17 22 2 8 13 24 22 2 8 13 17 22 2 18 9 16 22 2 12
19 16 10 6 8 21 1 20 15 12 21 1 20 15 4 19 7 14 25 4 13 7 5 25 23
21 7 14 25 4 19 24 10 6 4 19 7 14 25 23 9 1 10 11 23 19 1 10 11 8
3 24 20 11 18 3 7 14 25 18 9 16 5 11 12 3 24 20 15 8 3 24 14 15 18
13 1 5 15 23 13 16 5 11 23 3 17 10 6 18 21 16 5 6 12 21 17 20 6 4

If $n \geq (d + 1)^2$, then

$$f(i, j) = (d + 1)(i \bmod (d + 1)) + (j \bmod (d + 1)) + 1, i, j \in \mathbb{Z}$$

is a (d, n) – packing $(d + 1)^2$ – coloring of $\mathbb{Z} \boxtimes \mathbb{Z}$.

Octagonal lattice

$(d,n)=(1,1)$ [7] 6-coloring of $O_P^{12,12}$ was UNSAT.

Chi ($O_c^{12,12}$)=7

$s=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$

```
3 1 7 1 2 1 3 1 6 1 2 1
1 2 1 3 1 4 1 2 1 3 1 4
3 1 5 1 2 1 3 1 5 1 2 1
1 2 1 3 1 7 1 2 1 3 1 6
3 1 4 1 2 1 3 1 4 1 2 1
1 2 1 3 1 5 1 2 1 3 1 5
3 1 7 1 2 1 3 1 6 1 2 1
1 2 1 3 1 4 1 2 1 3 1 4
3 1 5 1 2 1 3 1 5 1 2 1
1 2 1 3 1 7 1 2 1 3 1 6
3 1 4 1 2 1 3 1 4 1 2 1
1 2 1 3 1 5 1 2 1 3 1 5
```

$(d,n)=(1,2)$ [2]

Chi ($O_c^{12,12}$)=2

$s=(1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4)$

```
2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
```

$(d,n)=(2,2)$ [8] 7-coloring of $O_P^{20,20}$ was UNSAT (68 sekunds, 4 cores).

Chi ($O_c^{12,12}$)=8

$s=(2\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5)$

```
1 2 4 5 1 2 6 3 1 2 5 6
3 7 1 2 3 4 1 2 8 4 1 2
1 2 4 6 1 2 5 3 1 2 6 5
3 8 1 2 3 4 1 2 7 4 1 2
1 2 4 5 1 2 6 3 1 2 5 6
3 7 1 2 3 4 1 2 8 4 1 2
1 2 4 6 1 2 5 3 1 2 6 5
3 8 1 2 3 4 1 2 7 4 1 2
1 2 4 5 1 2 6 3 1 2 5 6
3 7 1 2 3 4 1 2 8 4 1 2
1 2 4 6 1 2 5 3 1 2 6 5
3 8 1 2 3 4 1 2 7 4 1 2
```

$(d,n)=(2,3)$ [5] 4-coloring of $O_P^{16,16}$ was UNSAT.

Chi ($O_c^{12,12}$)=5

S=(2 2 2 3 3)

```
1 2 4 3 1 2 4 1 3 5 2 3
2 3 1 2 5 1 3 2 5 3 1 4
1 5 2 1 3 2 4 3 1 2 4 3
5 1 3 4 2 3 1 2 5 3 1 2
3 2 4 3 1 5 2 3 1 2 4 1
5 3 1 2 5 3 1 4 2 1 3 2
1 2 4 3 1 2 4 1 3 5 2 3
2 3 1 2 5 1 3 2 5 3 1 4
1 5 2 1 3 2 4 3 1 2 4 3
5 1 3 4 2 3 1 2 5 3 1 2
3 2 4 3 1 5 2 3 1 2 4 1
5 3 1 2 5 3 1 4 2 1 3 2
```

(d,n)=(2,4) [4] 3-coloring of $O_P^{16,16}$ was UNSAT.

Chi ($O_c^{12,12}$)=4

S=(2 2 2 2)

```
4 3 2 4 1 3 2 1 4 3 2 1
2 4 1 3 2 1 4 3 2 1 4 3
1 3 2 1 4 3 2 1 4 3 2 4
2 1 4 3 2 1 4 3 2 4 1 3
4 3 2 1 4 3 2 4 1 3 2 1
2 1 4 3 2 4 1 3 2 1 4 3
4 3 2 4 1 3 2 1 4 3 2 1
2 4 1 3 2 1 4 3 2 1 4 3
1 3 2 1 4 3 2 1 4 3 2 4
2 1 4 3 2 1 4 3 2 4 1 3
4 3 2 1 4 3 2 4 1 3 2 1
2 1 4 3 2 4 1 3 2 1 4 3
```

(d,n)=(3,2) [12-31]

Chi ($O_c^{20,20}$)<=31

S=(3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11 12 12 13 13 14 14 15 15 16 16 17 17 18)

```
3 8 4 5 6 1 26 4 9 5 10 11 7 6 24 17 12 5 10 1
18 11 1 2 7 3 20 2 16 19 1 2 4 8 1 2 3 9 4 2
6 3 2 4 10 1 2 5 25 6 2 1 3 5 2 1 14 7 2 1
12 28 5 9 1 8 14 4 1 12 7 9 15 4 21 6 13 3 8 4
2 1 7 3 2 6 13 17 2 18 3 8 2 1 11 5 2 1 10 19
1 2 15 4 5 2 1 29 4 2 1 10 6 2 3 7 1 2 4 6
20 11 16 8 10 24 3 6 7 5 27 14 4 1 23 22 8 17 9 5
1 6 4 2 1 9 12 2 1 8 3 2 1 26 5 2 1 4 3 2
14 7 2 3 21 5 2 4 11 19 2 16 9 4 2 13 6 12 2 18
5 10 1 25 13 6 1 3 7 10 1 6 5 3 1 7 15 11 1 8
2 4 3 1 2 8 4 1 2 18 12 1 2 8 4 1 2 3 6 1
16 2 17 7 11 2 3 14 9 6 4 20 3 2 30 10 5 2 9 19
4 1 8 5 6 1 10 15 2 1 8 5 7 1 6 4 3 1 14 23
1 2 3 26 24 2 4 3 28 2 13 4 1 2 11 21 1 2 7 6
10 4 9 12 22 1 7 5 6 1 16 3 10 17 9 5 8 3 15 13
5 3 1 2 8 4 3 2 1 14 19 2 1 6 4 2 25 18 1 2
4 7 2 17 6 1 2 11 9 4 2 5 7 12 2 1 3 20 2 1
3 16 1 10 4 3 5 18 27 15 1 3 8 10 29 4 5 14 11 8
2 5 9 21 2 1 7 13 2 6 4 23 2 1 9 31 2 1 7 4
15 2 1 30 3 2 12 8 1 2 3 22 1 2 4 3 1 2 13 6
```

(d,n)=(3,3) [11] 10-coloring of $O_P^{18,18}$ was UNSAT (874 seconds, 4 cores).

Chi ($O_c^{12,12}$)=**11**

SAT solver (2176 seconds, 4 cores)

S=(3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6)

```
1 2 6 5 8 3 1 2 5 6 8 3
4 9 3 1 2 10 4 9 3 1 2 11
1 2 5 6 7 3 1 2 6 5 7 3
8 4 3 1 2 11 8 4 3 1 2 10
1 2 6 5 9 3 1 2 5 6 9 3
4 7 3 1 2 10 4 7 3 1 2 11
1 2 5 6 8 3 1 2 6 5 8 3
9 4 3 1 2 11 9 4 3 1 2 10
1 2 6 5 7 3 1 2 5 6 7 3
4 8 3 1 2 10 4 8 3 1 2 11
1 2 5 6 9 3 1 2 6 5 9 3
10 4 3 1 2 7 11 4 3 1 2 7
```

(d,n)=(3,4) [8] 7-coloring of $O_P^{16,16}$ was UNSAT.

Chi ($O_c^{12,12}$)=**8**

SAT solver

S=(3 3 3 3 4 4 4 4)

```
1 6 3 2 8 4 1 6 3 2 8 4
2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3
1 8 3 2 6 4 1 8 3 2 6 4
2 5 4 1 7 3 2 5 4 1 7 3
1 6 3 2 8 4 1 6 3 2 8 4
2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3
1 8 3 2 6 4 1 8 3 2 6 4
2 5 4 1 7 3 2 5 4 1 7 3
1 6 3 2 8 4 1 6 3 2 8 4
2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3
1 8 3 2 6 4 1 8 3 2 6 4
2 5 4 1 7 3 2 5 4 1 7 3
```

(d,n)=(3,5) [8] 7-coloring of $O_P^{16,16}$ was UNSAT.

The construction of (d,n)=(3,4) can be used.

(d,n)=(3,6) [6] 5-coloring of $O_P^{16,16}$ was UNSAT.

Chi ($O_c^{12,12}$)=**6**

SAT solver

S=(3 3 3 3 3 3)

```
1 6 5 2 4 6 1 2 5 6 4 2
6 4 3 1 6 5 3 4 6 1 3 5
1 2 5 3 4 2 1 3 5 2 4 3
2 4 6 1 2 5 6 4 2 1 6 5
1 3 5 6 4 3 1 6 5 3 4 6
3 4 2 1 3 5 2 4 3 1 2 5
1 6 5 2 4 6 1 2 5 6 4 2
6 4 3 1 6 5 3 4 6 1 3 5
1 2 5 3 4 2 1 3 5 2 4 3
2 4 6 1 2 5 6 4 2 1 6 5
1 3 5 6 4 3 1 6 5 3 4 6
3 4 2 1 3 5 2 4 3 1 2 5
```

(d,n)=(4,3) [15-35]

Chi ($O_c^{28,28}$) <=35

S=(4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9 10 10 10 11 11 11 12 12 12 13 13 13 14
14 14 15 15)

2 7 4 22 5 27 3 10 4 8 1 3 12 6 2 10 3 9 1 2 17 3 14 25 1 13 8 18
16 1 3 9 6 28 1 20 11 32 17 9 7 5 1 24 16 8 6 5 11 12 10 2 35 5 29 24
12 10 5 8 14 31 30 3 5 6 2 4 29 14 3 2 33 4 7 18 3 1 26 4 9 3 6 2
7 3 33 2 13 1 4 15 9 18 1 8 23 12 6 1 9 27 20 2 6 5 22 15 8 1 21 34
23 1 17 6 19 25 3 2 7 10 5 22 13 11 2 3 5 10 17 4 1 19 3 2 13 14 5 9
3 18 11 5 4 8 16 12 1 24 6 3 21 1 4 15 7 14 2 8 12 9 11 7 1 6 4 2
1 10 7 2 27 20 26 3 14 4 17 2 9 8 5 16 6 1 3 31 5 24 2 3 28 16 8 12
4 13 6 3 1 15 9 2 6 5 11 7 1 12 3 2 4 25 30 29 10 1 4 20 15 32 2 5
9 22 2 21 5 4 12 8 1 13 3 4 10 19 6 9 1 11 5 2 13 8 3 7 6 1 11 3
8 1 14 17 6 3 2 18 7 9 23 2 14 5 15 8 3 21 18 6 1 12 9 2 4 5 10 19
7 4 5 9 11 1 10 4 5 6 1 3 20 22 27 1 7 4 2 16 14 17 26 3 1 23 6 2
1 12 15 2 3 13 24 25 2 12 16 17 4 11 2 6 28 5 24 3 10 6 2 8 13 9 27 3
20 16 8 7 1 6 5 19 3 8 15 1 5 10 13 3 12 8 9 4 1 7 15 18 5 4 2 10
3 5 2 28 22 9 4 11 14 21 6 2 9 18 7 1 2 6 19 11 25 2 3 12 1 21 14 11
1 4 6 30 3 1 10 2 7 3 1 23 26 29 5 4 14 20 3 1 5 22 8 4 6 17 7 9
8 12 13 2 15 18 17 8 6 5 4 12 2 11 3 8 15 2 30 7 13 9 16 3 23 5 2 19
26 1 3 7 5 4 11 1 27 24 3 13 16 6 9 1 17 10 5 3 6 2 12 1 11 10 6 4
14 9 16 20 6 25 3 2 9 14 7 1 8 5 4 3 2 33 21 1 8 24 4 15 7 32 3 2
29 21 5 2 10 8 1 19 5 4 15 3 2 34 20 6 7 14 11 19 2 27 3 28 5 18 8 1
6 7 3 4 12 13 31 3 2 17 6 11 12 1 10 18 22 3 1 5 16 9 6 1 10 4 2 11
17 15 2 1 23 6 5 26 7 1 16 9 5 2 4 13 8 15 17 12 4 2 7 20 13 3 5 9
16 4 8 3 27 9 22 4 10 2 8 3 28 14 6 25 3 1 23 26 6 3 1 35 14 2 12 1
19 10 5 6 11 2 20 3 1 6 18 30 21 1 2 10 5 7 4 8 2 11 5 21 4 6 3 7
13 2 3 1 24 4 14 5 15 13 7 4 3 8 11 19 6 3 24 29 18 1 10 15 2 9 1 25
4 18 12 9 7 29 3 1 17 2 12 6 1 9 16 20 27 1 5 2 13 3 4 22 17 30 5 6
2 26 1 5 10 2 6 8 11 4 23 5 10 7 2 4 3 12 14 9 11 8 6 7 16 1 3 14
11 8 3 21 4 16 1 3 9 25 14 1 3 22 15 8 1 6 2 31 3 1 5 2 12 10 4 20
1 17 6 15 2 12 13 7 6 5 2 18 19 4 11 5 13 21 7 28 23 4 15 19 6 3 9 5

(d,n)=(4,4) [12-20]

Chi ($O_c^{20,20}$) <=20

S=(4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8)

16 4 7 2 1 5 9 3 6 17 19 8 4 1 2 11 6 8 3 5
1 11 3 6 10 13 8 2 4 1 15 3 9 7 5 13 14 4 2 12
20 17 2 5 4 1 3 11 7 5 12 2 6 4 16 3 1 10 7 8
4 1 14 7 8 18 2 6 20 4 3 10 1 11 8 2 12 15 5 3
6 19 10 3 16 4 9 5 1 8 2 14 7 5 3 18 4 1 13 2
8 4 5 2 1 6 12 3 10 13 17 6 4 1 2 9 10 16 3 7
1 9 3 11 7 8 15 2 4 1 7 3 12 8 15 5 6 4 2 14
5 6 2 13 4 1 3 19 14 6 5 2 9 4 11 3 1 7 12 17
4 1 7 16 10 5 2 8 11 4 3 10 1 20 6 2 13 8 9 3
11 15 8 3 9 4 12 17 1 13 2 7 8 12 3 16 4 1 10 2
12 4 5 2 1 6 7 3 15 5 9 18 4 1 2 17 5 14 3 6
1 7 3 13 8 11 10 2 4 1 14 3 6 10 11 15 8 4 2 19
18 16 2 6 4 1 3 19 12 8 16 2 7 4 13 3 1 9 5 10
4 1 12 9 5 15 2 7 6 4 3 5 1 20 12 2 14 7 6 3
11 8 7 3 10 4 13 14 1 9 2 17 11 6 3 8 4 1 15 2
6 4 17 2 1 12 11 3 5 8 18 7 4 1 2 9 10 16 3 5
1 9 3 8 16 6 7 2 4 1 10 3 12 5 13 6 7 4 2 12
14 7 2 5 4 1 3 9 15 11 6 2 14 4 19 3 1 11 8 18
4 1 6 11 13 10 2 8 20 4 3 5 1 8 9 2 17 5 10 3
9 19 8 3 12 4 14 7 1 18 2 16 10 12 3 7 4 1 15 2

(d,n)=(4,5) [11-17]

Chi ($O_c^{20,20}$) ≤ 17

S=(4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7)

8 4 10 1 13 2 8 5 3 12 6 13 4 9 1 17 2 3 5 9
15 2 12 5 3 6 7 10 4 11 1 8 2 3 5 6 7 4 13 1
3 7 11 9 4 14 1 15 2 3 5 16 10 4 14 1 8 2 10 5
4 8 1 10 2 3 5 12 9 4 7 1 17 2 11 5 3 12 9 6
2 3 5 13 6 4 8 1 10 2 13 5 3 9 6 7 4 16 1 14
7 4 9 1 12 2 11 5 3 6 14 8 4 10 1 15 2 3 5 10
11 2 8 5 3 7 10 15 4 16 1 7 2 3 5 13 8 4 6 1
3 10 16 6 4 9 1 8 2 3 5 12 9 4 11 1 7 2 12 5
4 7 1 11 2 3 5 7 6 4 10 1 8 2 6 5 3 14 8 9
2 3 5 8 15 4 13 1 12 2 14 5 3 13 15 10 4 11 1 6
10 4 14 1 6 2 9 5 3 11 8 7 4 9 1 12 2 3 5 7
13 2 12 5 3 8 7 10 4 6 1 16 2 3 5 6 8 4 9 1
3 11 6 16 4 17 1 13 2 3 5 9 10 4 11 1 14 2 10 5
4 8 1 9 2 3 5 11 7 4 12 1 15 2 13 5 3 6 7 15
2 3 5 7 10 4 6 1 8 2 14 5 3 7 10 9 4 16 1 12
9 4 14 1 13 2 15 5 3 10 9 6 4 8 1 17 2 3 5 11
8 2 6 5 3 9 11 12 4 7 1 13 2 3 5 7 6 4 10 1
3 12 7 10 4 8 1 6 2 3 5 16 9 4 11 1 15 2 13 5
4 17 1 9 2 3 5 7 10 4 8 1 6 2 12 5 3 9 6 14
2 3 5 6 11 4 15 1 9 2 14 5 3 10 7 8 4 11 1 16

(d,n)=(4,6) [10-15]

Chi ($O_c^{20,20}$) ≤ 15

S=(4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6)

3 9 7 1 5 14 4 9 2 3 6 8 10 5 1 4 12 2 10 6
5 12 4 10 2 3 6 7 11 5 1 4 9 2 11 6 3 13 8 1
2 3 6 9 8 5 1 4 10 2 12 6 3 7 10 1 5 9 4 11
7 5 1 4 11 2 15 6 3 13 8 1 5 14 4 12 2 3 6 10
12 2 8 6 3 7 10 1 5 9 4 7 2 3 6 9 8 5 1 4
3 10 9 1 5 14 4 12 2 3 6 10 11 5 1 4 7 2 11 6
5 7 4 11 2 3 6 7 8 5 1 4 12 2 8 6 3 14 12 1
2 3 6 12 9 5 1 4 11 2 9 6 3 13 15 1 5 9 4 8
10 5 1 4 8 2 13 6 3 10 8 1 5 7 4 11 2 3 6 7
13 2 14 6 3 12 7 1 5 14 4 12 2 3 6 10 8 5 1 4
3 11 8 1 5 10 4 15 2 3 6 7 9 5 1 4 12 2 9 6
5 12 4 9 2 3 6 11 8 5 1 4 10 2 11 6 3 14 7 1
2 3 6 10 7 5 1 4 12 2 9 6 3 8 15 1 5 10 4 11
8 5 1 4 11 2 13 6 3 7 14 1 5 12 4 9 2 3 6 13
9 2 7 6 3 8 9 1 5 11 4 8 2 3 6 10 7 5 1 4
3 10 15 1 5 14 4 10 2 3 6 13 9 5 1 4 8 2 11 6
5 8 4 11 2 3 6 8 7 5 1 4 12 2 7 6 3 13 9 1
2 3 6 12 9 5 1 4 15 2 11 6 3 10 14 1 5 12 4 7
10 5 1 4 7 2 10 6 3 9 7 1 5 8 4 11 2 3 6 8
11 2 13 6 3 8 11 1 5 13 4 12 2 3 6 9 7 5 1 4

(d,n)=(4,10) [10] 9-coloring of $O_P^{20,20}$ was UNSAT (4,8 seconds, 4 cores).

Chi ($O_c^{20,20}$)=10

SAT solver

S=(4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)

9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3
7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10
6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1
4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5
2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8
9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3
7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10
6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1
4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5
2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8
9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3
7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10
6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1
4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5
2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8
9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3
7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10
6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5 4 9 3 1
4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8 2 7 10 5
2 7 10 5 4 9 3 1 6 2 8 10 7 4 5 3 9 6 1 8

(d,n)=(5,4) [20-38]

Chi ($O_c^{24,24}$)<=38

S=(5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 11 11 12 12 12
12 13 13 13 13 14 14)

4 2 23 11 12 31 28 37 22 16 10 20 1 3
3 1 17 15 9 6 2 1 5 26 29 34 2 4
5 14 8 19 24 3 30 21 4 18 12 11 13 6
16 10 2 27 33 32 7 38 35 25 8 1 9 7
6 3 1 22 4 11 5 6 10 3 14 2 4 5
7 26 20 12 18 15 2 1 13 31 19 23 17 8
5 2 4 9 28 3 7 8 4 24 12 3 1 6
8 13 11 21 16 6 29 34 5 27 9 10 15 7
1 3 12 17 10 2 4 3 1 11 20 14 4 2
2 4 19 5 23 8 30 25 7 18 6 16 3 1
7 22 6 3 1 15 26 33 12 2 4 5 8 9
2 14 11 20 32 4 9 24 3 21 17 10 13 1
4 8 16 7 10 2 5 6 1 11 7 19 15 3
6 25 18 1 3 13 36 8 14 4 2 12 9 5

(d,n)=(5,5) [17-29]

Chi (O_c^{28,28}) <=29

S=(5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10)

2 5 12 16 3 17 11 7 8 22 13 6 20 4 11 7 15 1 12 16 24 10 8 9 25 27 21 19
22 8 1 15 4 10 5 19 1 2 9 26 5 3 18 10 21 2 4 28 5 3 1 2 6 17 4 3
13 9 20 14 2 18 6 21 3 4 15 14 12 1 17 8 19 6 9 22 7 23 11 14 12 5 10 7
4 25 5 3 1 12 8 23 5 11 10 7 25 2 4 27 5 3 1 15 10 2 4 18 8 3 1 2
11 6 19 10 7 4 9 13 2 1 20 16 3 9 6 24 11 14 12 13 20 5 6 9 26 24 15 16
1 3 17 2 5 15 24 3 6 22 4 8 5 15 1 10 7 2 4 8 19 3 1 7 4 2 5 12
9 4 23 14 8 1 11 18 10 7 12 14 2 13 23 17 3 5 9 16 25 21 11 14 10 13 22 20
5 2 7 6 13 16 4 2 5 21 1 3 9 11 4 18 8 6 1 15 4 2 5 17 1 3 8 18
11 1 3 19 12 9 20 25 17 8 6 10 19 5 7 20 2 14 10 13 3 7 12 9 6 4 15 10
21 8 4 27 5 2 1 3 7 28 4 2 13 12 1 3 4 24 5 22 1 8 23 19 5 2 16 26
9 6 7 14 15 10 24 23 11 5 9 14 15 16 8 6 21 9 11 18 2 4 20 14 3 1 13 17
5 2 1 22 18 3 4 8 6 2 1 3 4 10 5 2 1 7 17 3 5 15 6 10 25 11 4 12
3 20 10 9 13 5 16 12 21 17 7 20 22 25 26 23 19 4 13 8 12 1 16 9 2 7 8 19
14 6 4 11 7 2 1 15 4 3 5 11 1 2 9 3 5 6 10 2 14 22 4 3 5 18 1 15
2 5 17 23 3 25 19 10 9 8 14 6 13 4 12 7 18 1 20 28 11 24 7 6 26 10 13 21
16 12 1 8 4 13 5 18 1 2 27 24 5 3 16 8 21 2 4 3 5 12 1 2 8 27 4 3
9 24 10 14 2 6 11 22 3 4 7 9 10 1 11 19 15 25 9 13 10 23 17 14 15 5 11 7
4 20 5 3 1 15 21 12 5 8 20 23 17 2 4 14 5 3 1 6 18 2 4 3 29 22 1 2
6 18 13 9 7 4 16 10 2 1 13 6 3 29 12 7 22 8 16 20 11 5 7 9 19 10 12 8
1 11 23 2 5 17 19 3 14 11 4 15 5 18 1 10 9 2 4 24 15 3 1 21 4 2 5 3
14 4 10 6 8 1 12 25 24 9 7 21 2 27 19 26 3 5 17 23 14 28 8 6 13 25 16 7
5 2 15 3 22 13 4 2 5 6 1 3 10 13 4 11 8 7 1 12 4 2 5 10 1 3 17 9
12 1 28 21 18 7 9 8 20 16 15 17 12 5 14 6 2 25 20 9 3 19 18 15 27 4 11 24
6 3 4 14 5 2 1 3 23 11 4 2 7 9 1 3 4 10 5 13 1 6 7 14 5 2 20 8
7 10 19 15 17 26 12 6 10 5 13 19 8 22 24 18 15 16 12 8 2 4 21 22 3 1 13 9
5 2 1 11 8 3 4 7 9 2 1 3 4 6 5 2 1 7 11 3 5 9 26 10 17 12 4 16
3 23 29 20 13 5 24 27 18 21 15 28 12 10 25 17 23 4 13 6 19 1 15 7 2 8 6 14
10 7 4 9 6 2 1 14 4 3 5 16 1 2 8 9 5 3 29 2 14 20 4 3 5 11 1 18

Chi (O_c^{14,14}) <=29

S=(5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10)

2 3 9 17 23 1 4 3 2 25 22 19 4 1
1 4 21 6 12 5 26 8 13 7 16 10 3 2
5 8 7 3 2 15 24 14 27 1 4 6 18 11
1 10 13 16 9 4 11 20 3 5 12 9 17 2
4 14 6 25 5 1 22 21 2 10 19 7 8 3
11 18 12 2 3 7 8 23 6 4 1 15 13 5
4 1 9 10 15 13 17 11 5 9 24 14 2 3
3 2 16 5 14 20 1 2 3 8 12 10 1 4
6 8 21 12 28 26 27 18 4 7 22 19 5 11
10 5 1 7 13 25 9 5 1 16 15 2 3 9
18 17 2 15 4 11 6 3 10 23 14 8 4 6
9 22 3 8 20 5 29 2 24 21 13 5 11 7
6 1 4 16 19 12 7 9 4 1 17 3 2 10
7 5 13 14 11 10 18 28 6 5 15 20 12 8

(d, n)=(5, 6) [16-25]

Chi (O_c^{28,28}) <=25

S=(5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8 9)

21 10 24 3 11 4 5 17 22 3 7 12 1 10 5 6 14 23 2 4 5 6 8 19 2 4 16 12
18 5 8 14 6 2 16 1 19 8 6 2 11 13 4 9 7 22 3 10 12 1 15 14 7 9 3 1
2 4 7 15 12 9 13 3 10 4 5 15 18 3 17 16 1 8 5 6 11 18 2 4 5 6 10 11
23 19 3 1 20 5 21 11 6 2 14 1 9 23 6 2 10 19 4 13 9 21 3 25 8 1 17 13
5 6 9 10 2 4 8 16 7 12 24 3 20 4 5 11 12 3 7 24 1 20 5 6 12 15 2 4
18 1 12 14 11 17 3 1 18 5 10 13 6 2 8 1 18 15 6 2 17 10 4 14 11 7 3 16
21 8 2 4 5 6 15 9 2 4 11 21 17 7 9 3 14 4 5 16 8 3 9 13 1 22 5 6
9 20 3 7 19 1 22 12 8 14 3 1 16 5 19 22 6 2 12 1 7 23 6 2 15 12 4 10
1 13 5 6 16 10 2 4 5 6 7 20 2 4 15 8 11 13 10 3 20 4 5 8 19 3 11 17
18 8 4 14 12 11 3 17 18 1 13 10 23 12 3 1 9 5 17 18 6 2 14 1 10 7 6 2
22 3 9 21 1 7 5 6 15 9 2 4 5 6 21 14 2 4 7 22 12 11 9 3 16 4 5 15
11 10 6 2 13 16 4 8 10 19 3 11 7 1 25 16 10 15 3 1 8 5 21 13 6 2 12 1
19 4 5 18 17 3 12 14 1 22 5 6 17 8 2 4 5 6 11 20 2 4 10 7 17 14 8 3
6 2 7 1 8 20 6 2 11 15 4 9 18 12 3 13 23 1 9 19 18 12 3 1 15 5 9 16
21 12 11 3 9 4 5 13 7 3 8 10 1 14 5 6 24 7 2 4 5 6 22 11 2 4 13 10
17 5 14 22 6 2 19 1 12 17 6 2 16 11 4 15 21 8 3 17 16 1 14 23 8 7 3 1
2 4 8 7 15 10 23 3 21 4 5 9 20 3 7 19 1 12 5 6 10 9 2 4 5 6 12 18
25 20 3 1 13 5 16 11 6 2 14 1 18 10 6 2 22 13 4 11 18 24 3 19 15 1 16 9
5 6 10 12 2 4 17 22 8 7 12 3 15 4 5 8 9 3 14 20 1 7 5 6 13 11 2 4
8 1 14 19 11 15 3 1 9 5 24 13 6 2 11 1 12 23 6 2 16 8 4 10 12 21 3 7
17 16 2 4 5 6 7 18 2 4 10 14 17 16 19 3 7 4 5 15 17 3 11 18 1 9 5 6
24 12 3 9 10 1 23 20 12 11 3 1 8 5 9 18 6 2 21 1 25 22 6 2 7 13 4 15
1 18 5 6 13 14 2 4 5 6 21 7 2 4 13 10 20 11 8 3 9 4 5 19 14 3 8 20
9 7 4 22 8 17 3 24 19 1 16 25 15 23 3 1 14 5 7 12 6 2 10 1 17 16 6 2
10 3 25 11 1 15 5 6 9 10 2 4 5 6 11 22 2 4 18 15 13 23 11 3 21 4 5 12
14 19 6 2 16 23 4 7 18 14 3 17 20 1 9 19 12 10 3 1 8 5 24 9 6 2 15 1
8 4 5 9 12 3 10 8 1 11 5 6 13 7 2 4 5 6 17 16 2 4 12 10 18 7 22 3
6 2 13 1 7 20 6 2 15 9 4 24 16 21 3 8 15 1 11 7 9 13 3 1 20 5 11 17

(d,n)=(5,14) [14]

Chi (O_c^{28,28})=14

SAT solver

S=(5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)

1 3 10 11 14 8 1 7 9 11 14 6 2 8 9 3 10 6 5 13 1 3 12 4 14 6 2 8
13 5 7 2 4 12 6 10 13 5 3 1 4 12 13 14 7 2 4 9 11 10 8 5 7 9 11 12
14 6 1 8 9 3 14 11 2 8 9 7 10 11 5 6 1 8 12 3 14 6 2 13 1 3 10 4
7 12 11 10 13 5 7 1 4 12 6 14 13 2 3 9 4 10 13 5 7 9 4 12 11 5 8 2
9 3 14 4 2 6 9 8 10 3 5 11 1 8 12 7 14 11 2 6 1 8 10 3 14 6 1 13
11 5 8 1 7 12 11 14 13 2 7 9 4 10 6 5 13 9 3 12 4 5 13 2 7 12 4 10
2 6 9 13 10 3 5 4 1 6 12 8 14 3 2 11 1 8 10 7 14 11 1 6 9 8 14 3
7 12 4 14 11 2 8 9 7 10 11 5 13 9 7 12 4 5 6 2 13 12 3 10 4 5 13 1
10 8 5 3 1 6 12 13 14 3 2 4 1 6 10 8 14 3 1 11 9 8 14 7 2 11 9 6
4 2 13 9 7 10 4 5 11 9 8 12 7 5 11 2 13 12 7 10 4 5 6 1 13 12 3 14
1 11 12 6 14 8 2 3 1 6 10 13 14 3 1 4 9 6 14 8 2 3 9 11 10 8 5 7
13 10 3 5 4 9 13 12 7 5 4 2 11 12 8 10 7 5 11 1 13 12 7 14 4 2 6 9
14 8 2 7 1 11 10 6 14 8 1 3 9 6 14 13 2 3 9 4 10 6 5 8 1 3 12 11
4 9 6 12 13 5 3 2 4 12 13 10 7 5 4 1 11 12 8 14 7 2 11 9 13 10 7 5
1 3 10 11 14 8 1 7 9 11 14 6 2 8 9 3 10 6 5 13 1 3 12 4 14 6 2 8
13 5 7 2 4 12 6 10 13 5 3 1 4 12 13 14 7 2 4 9 11 10 8 5 7 9 11 12
14 6 1 8 9 3 14 11 2 8 9 7 10 11 5 6 1 8 12 3 14 6 2 13 1 3 10 4
7 12 11 10 13 5 7 1 4 12 6 14 13 2 3 9 4 10 13 5 7 9 4 12 11 5 8 2
9 3 14 4 2 6 9 8 10 3 5 11 1 8 12 7 14 11 2 6 1 8 10 3 14 6 1 13
11 5 8 1 7 12 11 14 13 2 7 9 4 10 6 5 13 9 3 12 4 5 13 2 7 12 4 10
2 6 9 13 10 3 5 4 1 6 12 8 14 3 2 11 1 8 10 7 14 11 1 6 9 8 14 3
7 12 4 14 11 2 8 9 7 10 11 5 13 9 7 12 4 5 6 2 13 12 3 10 4 5 13 1
10 8 5 3 1 6 12 13 14 3 2 4 1 6 10 8 14 3 1 11 9 8 14 7 2 11 9 6
4 2 13 9 7 10 4 5 11 9 8 12 7 5 11 2 13 12 7 10 4 5 6 1 13 12 3 14
1 11 12 6 14 8 2 3 1 6 10 13 14 3 1 4 9 6 14 8 2 3 9 11 10 8 5 7
13 10 3 5 4 9 13 12 7 5 4 2 11 12 8 10 7 5 11 1 13 12 7 14 4 2 6 9
14 8 2 7 1 11 10 6 14 8 1 3 9 6 14 13 2 3 9 4 10 6 5 8 1 3 12 11
4 9 6 12 13 5 3 2 4 12 13 10 7 5 4 1 11 12 8 14 7 2 11 9 13 10 7 5

(d,n)=(6,19) [19]

Chi ($O_c^{76,76}$)=19 The construction is in a separate file (SAT solver).

(d,n)=(7,24) [24]

Chi ($O_c^{12,12}$)=24 **SAT solver**

S=(7)

```
1 18 17 16 15 14 24 23 22 21 20 19
7 6 5 4 3 2 13 12 11 10 9 8
24 23 22 21 20 19 1 18 17 16 15 14
13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2
1 18 17 16 15 14 24 23 22 21 20 19
7 6 5 4 3 2 13 12 11 10 9 8
24 23 22 21 20 19 1 18 17 16 15 14
13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2
1 18 17 16 15 14 24 23 22 21 20 19
7 6 5 4 3 2 13 12 11 10 9 8
24 23 22 21 20 19 1 18 17 16 15 14
13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2
```

Two-row Square Lattice

$(d, n) = (1, 1)$ [5] Known result!

Chi ($P_2 \square C_x$) = 5

S = (1 2 3 4 5)

```
 1 2 1 3 1 4
 3 1 5 1 2 1
```

$(d, n) = (1, 2)$ [2]

Chi ($P_2 \square C_2$) = 2

S = (1 1)

```
 1 2
 2 1
```

$(d, n) = (2, 1)$ [12]

Chi ($P_2 \square C_{40}$) = 12

S = (2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13)

```
 1 2 11 3 1 6 5 2 1 12 8 3 1 6 2 9 1 3 5 10 1 2 4 12 1 3 5 2 1 11 8 7
 1 3 2 9 1 6 4 5
```

```
 8 7 1 4 2 9 1 3 10 4 1 2 5 7 1 4 11 2 1 8 6 3 1 7 2 9 1 4 6 3 1 2
 5 4 1 10 12 2 1 3
```

11-coloring of $P_2 \square P_{52}$ was UNSAT (21297 seconds, 4 cores).

$(d, n) = (2, 2)$ [6]

Chi ($P_2 \square C_{16}$) = 6

S = (2 2 3 3 4 4)

```
 1 3 2 4 1 5 2 6 1 3 2 4 1 5 2 6
 2 5 1 6 2 3 1 4 2 5 1 6 2 3 1 4
```

$(d, n) = (2, 3)$ [5]

Chi ($P_2 \square C_{12}$) = 5

S = (2 2 2 3 3)

```
 1 2 3 1 2 4 1 3 2 1 3 4
 3 5 4 6 3 5 2 6 4 5 2 6
```

$(d, n) = (2, 4)$ [4]

Chi ($P_2 \square C_4$) = 4

S = (2 2 2 2)

2 1 3 4
3 4 2 1

$(d, n) = (3, 1)$ [17-19]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 19

S = (3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21)

3 17 5 1 15 7 2 4 6 1 3 11 13 18 2 1 5 10 9 4 3 1 12 2 6 7 11 1 2 15 3 5
4 1 8 18 2 12 14 1 3 6 9 7 2 1 5 15 19 17 3 1 4 2 8 10 16 1 2 6 3 7 13 1
4 8 2 12 10 1 3 7 19 14 2 1 5 4 13 9 3 1 12 2 4 18 6 1 2 7 3 4 9 1 16 10
2 8 12 1 3 13 6 4 2 1 14 7 8 2 3 1 18 12 5 4 9 1 2 6

1 4 2 14 10 3 1 9 12 5 2 8 1 4 7 3 6 16 1 2 14 19 8 5 1 3 4 13 17 10 1 9
2 6 7 3 1 16 5 4 2 11 1 10 8 3 4 13 1 2 6 12 7 5 1 3 9 14 4 11 1 5 2 18
15 3 1 6 9 5 2 4 1 11 16 3 8 6 1 2 7 17 10 5 1 3 15 8 11 14 1 5 2 19 6 3
1 4 7 5 2 17 1 9 11 3 15 5 1 4 10 6 16 2 1 3 7 13 11 8

$(d, n) = (3, 2)$ [10]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) = 10

S = (3 3 4 4 5 5 6 6 7 7)

1 10 3 9 2 4 6 1 5 8 2 9 7 4 5 3 2 1 6 7 3 8 2 10 1 5 4 9 3 6 1 10
2 7 8 9 5 1 2 6 4 3 8 1 2 7 10 1 4 3 9 2 6 1 3 8 4 7 2 1 10 5 3 8
4 1 9 5 2 6 3 1 2 4 10 6 8 7 3 1 9 4 2 8 5 1 2 3 10 4 5 1 6 2 9 3
8 1 7 2 3 5 6 1 8 2 10 4 9 3 1 7 2 6 1 4 8 5 2 7

4 2 8 5 1 7 3 2 10 4 1 3 6 2 1 8 10 4 9 2 5 1 4 6 3 2 7 1 8 2 4 5
3 1 6 2 4 3 10 7 1 2 9 5 4 3 6 2 8 5 1 7 4 10 2 5 1 6 3 9 4 2 1 7
6 2 3 10 1 4 8 7 5 9 3 2 1 4 5 2 6 10 1 3 7 4 6 9 1 8 2 3 7 4 1 5
2 6 4 10 1 9 2 4 3 7 5 1 6 2 8 4 5 3 10 2 9 1 3 6

9-coloring of $P_2 \square P_{120}$ was UNSAT using SAT solver!

$(d, n) = (3, 3)$ [8]

Chi ($P_2 \square C_{100}$) = 8

S = (3 3 3 4 4 4 5 5)

1 2 5 4 6 3 7 2 1 3 5 4 6 2 8 3 1 2 5 4 8 3 7 2 4 6 5 1 3 2 8 5
7 1 3 2 8 4 6 5 3 2 8 1 7 4 6 5 3 1 7 2 5 4 6 3 1 2 8 3 5 4 6 2
8 3 1 6 5 2 1 3 7 5 4 6 1 3 7 2 8 5 4 3 1 2 8 4 6 3 1 2 8 3 5 4
6 2 8 3

6 7 3 8 2 1 5 4 6 8 2 7 3 1 5 4 6 7 3 1 2 6 5 1 3 8 2 7 4 6 1 3
2 4 6 5 1 3 2 7 1 4 6 5 2 3 1 8 2 4 6 3 1 8 2 7 5 4 6 1 2 7 3 1
5 4 2 7 3 8 4 6 2 1 3 8 2 5 4 6 3 1 2 7 6 5 3 1 2 7 5 4 6 1 2 7
3 1 5 4

$(d, n) = (3, 4)$ [7]

Chi ($P_2 \square C_{16}$) = 7

Dynamic method!

S = (3 3 3 3 4 4 4)

1 4 2 3 1 6 5 7 2 3 1 4 2 6 5 7
3 6 5 7 4 2 3 1 4 6 5 7 3 1 4 2

Chi ($P_2 \square C_{100}$) = 7

SAT solver!

S = (3 3 3 3 4 4 4)

1 4 3 2 7 5 6 4 3 2 1 4 7 5 6 2 1 4 3 2 7 5 1 4 3 2 1 6 7 4 3 2
1 4 5 6 3 2 1 4 3 7 5 2 1 4 3 2 6 7 1 4 3 2 1 5 6 4 3 2 1 4 7 5
3 2 1 4 3 6 7 2 1 4 3 2 5 6 1 4 3 2 1 7 5 4 3 2 1 4 6 7 3 2 1 4
3 5 6 2
7 5 6 1 4 3 2 1 7 5 6 3 2 1 4 3 7 5 6 1 4 3 2 6 7 5 4 3 2 1 5 6
7 3 2 1 4 7 5 6 2 1 4 3 6 7 5 1 4 3 2 5 6 7 4 3 2 1 7 5 6 3 2 1
4 6 7 5 2 1 4 3 5 6 7 1 4 3 2 7 5 6 4 3 2 1 6 7 5 3 2 1 4 5 6 7
2 1 4 3

$(d, n) = (3, 5)$ [7]

Chi ($P_2 \square C_{60}$) = 7

S = (3 3 3 3 3 4 4)

4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1
5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6 4 1 5 3 2 6
3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2
7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5 3 2 7 4 1 5

$(d, n) = (3, 6)$ [6]

Chi ($P_2 \square C_6$) = 6

S = (3 3 3 3 3 3)

6 2 3 4 1 5
4 1 5 6 2 3

$(d, n) = (4, 1)$ [23-27]

Chi ($P_2 \square C_{160}$) ≤ 27

S=(4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30)

12 3 19 1 10 5 2 8 3 7 18 1 15 4 6 11 2 12 13 1 3 5 14 9 6 20 2 1 26 7 11 10
3 12 16 1 4 2 5 18 14 8 6 1 3 25 19 9 23 12 4 1 20 2 16 5 3 10 14 1 6 18 7 2
8 4 21 1 3 19 13 9 5 2 11 1 22 14 6 4 12 5 17 1 2 9 8 3 6 13 25 1 16 4 2 15
7 10 6 1 5 24 11 20 2 17 3 1 4 8 9 14 12 16 2 1 7 5 3 23 21 13 4 1 10 2 6 17
18 14 3 1 8 5 9 2 6 4 19 1 26 22 3 12 8 2 11 1 7 5 10 15 21 16 6 1 2 20 9 4

11 2 13 25 6 14 4 1 24 22 9 2 16 5 3 1 17 10 8 7 4 2 23 1 19 27 3 21 4 5 8 1
2 6 13 9 24 15 3 1 17 7 2 4 10 11 5 1 2 22 3 6 7 8 13 1 15 4 2 9 11 17 3 1
5 12 26 24 2 6 10 1 4 7 3 8 20 15 2 1 23 3 18 27 10 7 4 1 11 2 21 19 5 3 14 1
12 9 8 2 3 4 22 1 18 13 7 6 5 2 10 1 3 15 19 4 11 6 27 1 2 8 9 25 3 5 7 1
12 4 2 11 16 15 20 1 3 10 7 24 2 5 13 1 4 6 9 14 3 18 2 1 4 17 23 3 8 5 7 1

$(d, n) = (4, 2)$ [13-16]

Chi ($P_2 \square C_{60}$) ≤ 16

S=(4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11)

4 1 3 10 9 2 7 11 8 5 1 12 13 9 2 3 14 11 1 10 7 5 2 13 4 3 1 11 7 9 2 3
12 5 1 13 10 6 2 9 4 3 1 11 7 5 2 1 12 6 4 3 7 1 2 9 6 5 8 16

13 12 6 5 14 4 1 15 3 6 2 10 4 7 1 5 6 8 2 4 3 9 1 12 6 8 2 5 10 4 1 6
14 8 2 4 3 7 1 5 15 8 2 6 10 4 3 9 13 8 2 5 14 10 11 4 3 1 2 7

$(d, n) = (4, 3)$ [11]

Chi ($P_2 \square C_{144}$) = 11

S=(4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7)

1 5 8 6 10 3 2 7 1 8 4 5 9 3 11 2 1 5 10 6 7 3 8 2 1 9 3 5 4 11 6 2
7 1 3 8 2 5 4 9 6 10 1 3 7 2 9 5 4 8 1 3 11 2 4 10 6 7 1 9 3 8 2 5
1 4 11 6 3 10 2 9 1 8 11 4 3 7 2 6 1 5 4 9 3 8 2 5 11 1 6 7 3 10 2 9
11 8 1 4 3 6 2 7 5 4 1 9 3 8 2 5 11 6 1 7 3 10 2 9 11 8 1 5 3 6 2 7
11 5 1 9 3 8 2 5 11 6 1 7 3 4 2 9

3 7 2 4 1 9 5 11 6 3 2 10 1 7 6 8 4 3 9 2 1 11 5 4 6 10 7 2 1 8 3 9
5 4 10 6 11 1 7 3 2 8 5 4 11 6 1 3 10 2 7 6 5 9 1 8 3 2 5 11 4 6 10 7
3 9 2 8 1 5 4 7 3 6 2 5 1 9 10 8 3 11 2 7 6 1 10 4 3 9 2 8 5 1 4 6
3 7 2 5 10 9 1 8 3 11 2 6 10 7 1 4 3 9 2 8 5 4 1 6 3 7 2 4 10 9 1 8
3 4 2 6 10 7 1 4 3 9 2 8 5 10 6 11

$(d, n) = (4, 4)$ [10]

$\text{Chi}(\mathbb{P}_2 \square \mathbb{C}_{160}) = 10$

$S = (4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6)$

1 10 4 2 3 7 5 6 10 1 4 9 2 3 8 7 5 6 9 4 2 10 1 3 8 7 5 4 10 2 1 3
5 6 8 7 1 2 9 3 4 7 5 6 8 9 2 10 3 1 8 7 5 6 2 10 3 1 9 4 8 7 5 6
3 9 1 4 2 6 8 7 5 2 1 10 4 3 2 6 8 7 10 1 4 3 2 7 5 6 10 1 9 4 2 3
8 7 5 2 6 4 10 3 9 1 8 7 2 5 6 3 8 1 10 4 9 2 1 5 3 6 8 7 4 2 10 1
3 7 5 6 4 2 10 1 9 4 8 7 5 6 2 9 1 4 3 2 8 7 5 6 1 10 4 2 3 6 8 7

3 5 6 8 9 1 4 2 3 8 7 5 6 1 10 4 2 3 1 8 7 5 6 4 2 9 1 3 6 8 7 4
9 2 10 3 4 5 6 8 1 10 2 3 4 1 7 5 6 4 2 9 3 1 4 8 7 5 6 2 3 10 1 4
2 8 7 5 3 10 1 9 4 3 6 8 7 5 1 9 4 3 2 5 6 8 9 1 4 3 2 8 7 5 6 1
10 4 9 3 1 8 7 2 5 6 4 3 10 1 9 4 7 2 5 6 3 8 7 4 10 2 1 9 3 5 6 8
4 2 9 1 3 8 7 5 6 3 2 1 10 4 3 8 7 5 6 10 1 4 9 2 3 8 7 5 1 9 4 2

$(d, n) = (4, 5)$ [9]

$\text{Chi}(\mathbb{P}_2 \square \mathbb{C}_{144}) = 9$

Dynamic algorithm!

$S = (4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)$

1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3 1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3
1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3 1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3
1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3 1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3
1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3 1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3
1 9 7 8 5 4 2 3 1 8 6 9 5 4 2 3

5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6 5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6
5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6 5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6
5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6 5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6
5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6 5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6
5 4 2 3 1 6 9 7 5 4 2 3 1 7 8 6

$(d, n) = (4, 6)$ [9]

$\text{Chi}(\mathbb{P}_2 \square \mathbb{C}_{120}) = 9$

$S = (4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5)$

1 6 3 4 2 5 7 9 8 1 3 4 2 5 8 6 7 9 3 4 2 5 1 6 9 8 7 4 2 5 1 6
3 4 9 8 7 5 1 6 3 4 2 1 9 8 5 6 3 4 2 5 7 1 9 8 3 4 2 5 6 8 1 7
9 4 2 5 6 3 4 8 1 7 9 5 6 3 4 2 9 8 1 5 6 3 4 2 1 7 9 8 6 3 4 2
1 6 5 7 9 3 4 2 1 6 9 8 5 7 4 2 1 6 3 7 9 5 8 2

7 5 9 8 1 6 3 4 2 5 6 7 9 1 3 4 2 5 1 6 8 7 3 4 2 5 1 6 3 9 8 7
2 5 1 6 3 4 2 9 8 7 5 6 3 4 2 7 1 9 8 6 3 4 2 5 6 1 7 9 3 4 2 5
6 3 8 1 7 9 2 5 6 3 4 2 8 1 7 5 6 3 4 2 7 9 8 5 6 3 4 2 1 5 7 9
8 3 4 2 1 6 8 5 7 3 4 2 1 6 3 9 8 5 4 2 1 6 3 4

$(d, n) = (4, 8)$ [8]

Chi ($P_2 \square C_8$) = 8

S=(4 4 4 4 4 4 4 4)

3 1 2 5 4 8 7 6
4 8 7 6 3 1 2 5

$(d, n) = (5, 1)$ [29-34]

Chi ($P_2 \square C_{200}$) ≤ 34

S=(5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38)

9 3 27 4 14 16 2 5 1 22 6 10 23 7 9 3 11 21 1 2 4 8 12 14 15 5 10 16 1 3 6 2
19 13 8 27 4 3 1 12 9 31 14 5 15 33 11 8 1 24 6 3 29 16 9 10 30 12 1 7 2 5 14 18
4 3 20 13 1 27 17 7 2 3 16 8 11 28 1 5 4 6 24 10 2 13 25 3 1 5 12 20 17 7 9 23
2 4 1 8 21 3 6 26 15 19 13 5 1 2 11 10 8 4 17 3 31 5 1 22 9 2 6 12 15 13 23 10
1 3 4 18 19 2 9 5 8 30 1 16 11 20 6 3 7 2 4 24 1 14 33 25 31 5 23 10 11 2 1 13
8 21 4 6 15 3 26 7 1 34 2 5 30 8 9 32 29 13 1 3 17 16 2 10 23 14 11 4 1 5 12 25
18 3 2 13 28 8 1 6

2 11 7 1 17 15 12 19 3 8 24 4 2 1 18 13 5 20 29 30 6 25 3 1 7 2 17 9 4 32 28 11
26 1 5 22 7 2 18 23 6 10 20 1 3 2 4 21 7 17 13 34 5 1 2 19 4 25 3 8 6 11 22 1
15 26 2 9 23 10 5 6 4 1 12 21 32 31 2 19 3 9 7 1 15 18 29 8 4 22 2 6 14 1 3 11
16 10 5 33 27 30 2 1 7 4 12 9 3 18 24 14 6 1 28 2 7 20 25 16 32 4 3 1 8 11 5 2
7 21 29 14 6 1 27 26 3 17 4 2 12 10 13 1 5 15 22 9 8 28 3 2 6 1 4 19 7 12 3 17
16 9 5 1 2 18 20 14 27 10 4 11 3 1 12 6 2 24 7 4 5 22 19 1 15 8 3 9 2 6 7 21
20 1 33 4 31 10 5 26

$(d, n) = (5, 2)$ [16-19]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 19

S=(5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11 12 12 13 13 14)

6 2 11 3 13 10 7 5 1 17 9 2 4 11 6 3 8 13 1 16 12 2 5 7 4 14 10 3 1 9 6 2
15 8 11 16 4 5 1 7 3 2 14 12 6 10 11 15 1 4 8 2 18 3 13 10 7 14 1 5 6 2 4 16
12 3 8 5 1 9 13 2 17 7 4 6 12 3 1 11 16 2 5 8 3 14 10 9 1 6 5 2 15 7 4 13
3 6 1 8 11 2 18 14 10 5 4 15 1 3 7 2 6 5 19 17 12 18 1 4

5 9 15 1 16 4 2 6 8 3 12 18 14 1 5 7 2 10 4 15 9 3 6 1 11 8 2 17 13 5 4 7
12 1 3 10 2 6 18 9 13 8 4 1 5 17 2 3 7 16 9 6 5 1 12 4 2 11 8 3 9 19 15 1
7 10 2 6 4 11 18 3 14 1 8 5 2 10 9 15 4 13 6 1 7 17 2 18 4 11 3 8 12 1 16 10
2 9 5 17 4 7 3 1 12 6 2 13 8 16 9 11 4 1 14 10 2 3 7 8

$(d, n) = (5, 3)$ [13-15]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 15

S=(5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9)

7 3 14 9 1 10 4 5 12 2 11 3 14 8 1 7 6 13 9 2 5 3 14 10 1 12 4 5 8 2 7 3
9 10 1 15 6 13 4 2 9 3 10 12 1 4 5 11 6 2 8 3 10 12 1 6 14 4 5 2 7 3 9 12
1 5 11 6 10 2 9 3 8 12 1 11 4 5 14 2 8 3 7 13 1 11 6 10 4 2 7 3 9 13 1 4
5 10 6 2 9 3 8 15 1 6 13 4 5 2 8 3 7 11 1 5 10 6 12 2

4 5 11 6 2 8 3 7 13 1 6 9 4 5 2 10 3 12 11 1 4 8 6 7 2 9 3 11 13 1 6 14
4 5 2 8 3 7 11 1 5 14 6 8 2 7 3 9 13 1 15 4 5 7 2 9 3 8 11 1 10 6 13 4
2 8 3 7 14 1 4 5 13 6 2 7 3 9 10 1 6 12 4 5 2 9 3 8 14 1 5 12 6 11 2 8
3 7 14 1 12 4 5 11 2 7 3 9 10 1 12 6 14 4 2 9 3 8 13 1

$(d, n) = (5, 4)$ [12-14]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 14

S=(5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8)

2 4 10 13 6 1 3 9 12 7 2 4 8 5 11 1 3 10 6 12 2 4 13 7 8 1 3 5 14 9 2 4
6 11 10 1 3 12 8 5 2 4 13 7 6 1 3 5 14 10 2 4 6 11 9 1 3 10 8 5 2 4 13 7
6 1 3 10 12 9 2 4 8 5 11 1 3 9 6 12 2 4 13 7 8 1 3 9 14 10 2 4 6 5 13 1
3 7 8 12 2 4 9 11 6 1 3 5 14 7 2 4 6 13 10 1 3 7 8 5

1 3 11 7 8 2 4 5 14 10 1 3 6 13 9 2 4 7 8 5 1 3 9 11 6 2 4 10 12 7 1 3
8 5 13 2 4 7 6 9 1 3 10 11 8 2 4 9 12 7 1 3 8 5 13 2 4 7 6 12 1 3 9 11
8 2 4 5 14 7 1 3 6 13 10 2 4 7 8 5 1 3 10 11 6 2 4 5 12 7 1 3 8 11 9 2
4 10 6 5 1 3 13 7 8 2 4 10 12 9 1 3 8 5 11 2 4 9 6 12

$(d, n) = (5, 5)$ [12-13]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 13

S=(5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7)

8 9 2 7 4 13 5 1 9 3 7 6 2 8 4 10 5 1 6 3 8 9 2 7 4 11 5 1 9 3 7 6
2 11 4 12 5 1 6 3 8 9 2 12 4 10 5 1 9 3 7 6 2 10 4 11 5 1 12 3 8 9 2 7
4 13 5 1 10 3 7 6 2 11 4 10 5 1 6 3 8 9 2 7 4 12 5 1 9 3 7 6 2 8 4 11
5 1 10 3 8 9 2 11 4 10 5 1 9 3 7 6 2 8 4 12 5 1 11 3

10 5 1 12 3 6 8 2 10 4 11 5 1 13 3 9 7 2 11 4 12 5 1 10 3 6 8 2 12 4 10 5
1 8 3 9 7 2 10 4 11 5 1 7 3 6 8 2 11 4 12 5 1 8 3 9 7 2 6 4 10 5 1 11
3 6 8 2 9 4 12 5 1 8 3 9 7 2 12 4 11 5 1 10 3 6 8 2 11 4 10 5 1 13 3 9
7 2 6 4 12 5 1 7 3 6 8 2 12 4 11 5 1 10 3 9 7 2 6 4

$(d, n) = (5, 6)$ [11-12]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 12

S=(5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6)

8 10 7 3 1 5 11 6 4 2 7 9 8 3 1 5 11 6 4 2 8 10 7 3 1 5 11 6 4 2 7 9
8 3 1 5 11 6 4 2 8 10 7 3 1 5 11 6 4 2 7 9 8 3 1 5 11 6 4 2 8 10 7 3
1 5 11 6 4 2 7 9 8 3 1 5 11 6 4 2 8 10 7 3 1 5 11 6 4 2 7 9 8 3 1 5
11 6 4 2 8 10 7 3 1 5 11 6 4 2 7 9 8 3 1 5 11 6 4 2

5 12 6 4 2 9 8 10 3 1 5 12 6 4 2 10 7 9 3 1 5 12 6 4 2 9 8 10 3 1 5 12
6 4 2 10 7 9 3 1 5 12 6 4 2 9 8 10 3 1 5 12 6 4 2 10 7 9 3 1 5 12 6 4
2 9 8 10 3 1 5 12 6 4 2 10 7 9 3 1 5 12 6 4 2 9 8 10 3 1 5 12 6 4 2 10
7 9 3 1 5 12 6 4 2 9 8 10 3 1 5 12 6 4 2 10 7 9 3 1

$(d, n) = (5, 10)$ [10]

Chi ($P_2 \square C_{10}$) = 10

S=(5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)

5 4 2 9 1 8 7 6 10 3
8 7 6 10 3 5 4 2 9 1

$(d, n) = (6, 1)$ [36-42]

Chi ($P_2 \square C_{232}$) ≤ 42

S=(6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47)

1 8 19 12 3 13 22 6 25 7 39 2 1 5 21 11 4 17 31 2 3 23 9 18 1 27 13 19 33 10 6 37
14 5 7 40 1 12 16 36 26 20 8 1 4 3 24 11 18 2 9 30 6 5 3 1 41 2 7 10 22 16 4 17
11 13 6 1 25 8 3 2 14 5 21 12 24 10 23 1 4 35 7 8 36 2 39 30 3 6 15 1 37 2 9 20
34 11 4 31 25 13 19 1 3 5 7 2 10 17 14 8 32 42 6 1 4 28 41 22 3 24 9 27 10 5 6 12
1 2 19 15 35 18 4 23 3 8 9 26 1 25 34 2 7 5 11 40 6 14 32 8 1 3 10 17 4 2 30 24
19 21 12 11 1 5 9 33 7 16 3 15 20 25 31 4 1 35 8 2 11 13 6 18 10 5 3 14 1 24 27 23
7 2 4 1 9 39 12 40 17 13 34 3 6 5 8 1 19 26 22 9 4 15 10 2 7 21 33 3 1 28 20 29
23 5 14 32 36 2 4 35

18 15 16 5 2 38 1 4 9 26 30 34 3 14 10 8 20 24 1 6 12 7 28 5 15 4 2 29 3 8 1 11
32 22 2 4 9 3 25 17 35 6 2 5 10 13 7 21 15 1 23 19 14 4 34 8 31 27 12 28 38 1 3 5
2 9 20 29 33 15 7 4 26 1 32 18 19 6 2 3 9 11 16 13 5 1 17 40 22 4 27 14 12 10 7 5
3 1 8 18 2 6 29 21 16 26 23 4 9 1 12 15 3 11 2 5 38 33 7 13 20 1 2 30 8 4 16 36
3 14 11 21 7 17 1 5 2 6 31 10 29 39 13 4 12 3 1 20 16 37 2 15 9 22 28 5 7 27 1 6
18 13 3 23 2 8 4 38 14 10 1 6 2 36 26 5 29 17 3 12 7 9 1 22 19 4 2 32 28 21 16 8
15 6 3 5 11 20 30 10 2 1 37 4 7 41 14 18 2 25 31 3 16 11 1 5 6 12 24 13 8 4 2 27
17 9 1 3 6 7 10 11

$(d, n) = (6, 2)$ [19-23]

Chi (P₂ □ C₁₂₀) ≤ 23

SA algorithm!

S=(6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11 12 12 13 13 14 14 15 15 16 16 17)

21 6 9 13 4 2 14 17 5 1 16 6 3 8 12 19 15 2 7 4 6 1 10 18 17 5 9 3 7 2 13 8
11 1 5 3 6 16 18 12 17 2 4 5 13 1 7 9 15 3 4 12 5 2 11 16 10 1 4 8 14 6 21 3
7 2 18 9 5 1 6 13 4 12 16 15 10 2 3 11 21 1 7 17 13 14 3 4 6 2 16 11 15 1 5 12
10 8 17 9 7 2 4 11 6 1 15 12 3 13 5 9 14 2 18 8 16 1 10 7

15 12 20 1 8 3 22 11 7 18 10 2 4 9 23 1 5 13 14 21 3 11 8 2 16 12 4 1 6 20 15 19
10 14 4 2 9 7 21 1 8 22 3 11 6 10 14 2 20 19 8 1 18 6 17 7 3 9 13 2 5 15 12 1
20 4 10 11 8 17 3 2 14 7 19 1 5 9 8 6 4 20 18 2 12 5 10 1 8 9 19 7 22 3 4 2
6 13 14 1 18 3 5 16 21 20 8 2 10 4 7 1 6 17 11 3 19 4 5 2

(d,n)=(6,3)

[16-19]

SA algorithm!

Chi (P₂ □ C₁₂₀) ≤ 19

S=(6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9 10 10 10 11 11 11 12)

6 2 7 5 13 4 11 1 6 17 3 5 9 2 12 16 8 11 7 1 10 15 3 6 13 2 5 4 14 9 10 1
12 8 3 13 11 2 9 14 16 4 15 1 12 6 3 11 5 2 8 14 7 15 9 1 5 11 3 10 6 2 14 4
15 16 8 1 7 10 3 9 17 2 12 6 11 4 5 1 13 19 3 14 8 2 7 5 10 6 18 1 12 15 3 7
4 2 9 17 8 5 18 1 6 14 3 10 11 2 8 4 16 13 9 1 14 10 3 15

18 1 9 16 3 12 14 2 8 15 7 10 4 1 13 6 3 14 5 2 4 9 17 12 8 1 7 11 3 16 6 2
15 5 4 7 17 1 6 10 3 5 8 2 7 13 9 18 4 1 10 16 3 6 12 2 4 13 8 17 7 1 9 5
3 12 11 2 6 13 4 5 14 1 15 8 3 7 10 2 9 16 6 12 4 1 17 11 3 9 13 2 8 14 5 16
6 1 10 11 3 12 13 2 4 7 9 15 5 1 17 12 3 6 7 2 5 11 4 8

(d,n)=(6,4)

[15-17]

SA algorithm!

Chi (P₂ □ C₁₂₀) ≤ 17

S=(6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 10)

8 1 13 7 12 3 11 2 9 16 10 4 6 1 5 8 14 3 7 2 6 13 12 4 9 1 10 16 5 3 8 2
15 7 6 4 13 1 12 16 9 3 6 2 5 8 13 4 7 1 11 14 10 3 12 2 7 6 5 4 8 1 17 15
14 3 5 2 8 10 7 4 6 1 5 9 11 3 7 2 6 16 8 4 9 1 7 10 5 3 13 2 11 17 6 4
5 1 10 14 7 3 16 2 5 8 15 4 11 1 14 13 9 3 10 2 16 6 5 4

9 2 10 14 6 4 5 1 8 15 7 3 13 2 12 11 9 4 10 1 15 5 8 3 11 2 7 6 14 4 12 1
9 11 10 3 5 2 8 14 7 4 11 1 10 15 12 3 9 2 6 5 8 4 16 1 13 9 11 3 10 2 12 7
6 4 9 1 11 16 13 3 12 2 14 8 15 4 10 1 13 5 12 3 11 2 15 6 14 4 8 1 12 7 9 3
15 2 8 13 11 4 6 1 9 12 10 3 7 2 6 5 8 4 12 1 7 15 11 3

(d,n)=(6,5)

[14-16]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 16

S=(6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9)

12 2 5 4 11 13 8 1 10 3 15 7 6 2 5 4 13 9 14 1 6 3 8 10 15 2 5 4 13 14 12 1
9 3 7 6 8 2 5 4 12 14 11 1 8 3 10 9 7 2 5 4 11 14 13 1 7 3 6 8 10 2 5 4
13 14 12 1 10 3 9 7 6 2 5 4 12 14 11 1 6 3 8 10 9 2 5 4 11 14 13 1 9 3 15 6
8 2 5 4 9 7 14 1 8 3 11 15 13 2 5 4 8 10 9 1 7 3 6 15

10 1 9 3 7 6 14 2 5 4 9 12 11 1 8 3 10 16 7 2 5 4 12 11 9 1 7 3 6 8 10 2
5 4 11 15 13 1 10 3 9 7 6 2 5 4 13 15 12 1 6 3 8 10 9 2 5 4 12 15 11 1 9 3
7 6 8 2 5 4 11 15 13 1 8 3 10 9 7 2 5 4 13 15 12 1 7 3 6 8 10 2 5 4 7 16
11 1 10 3 13 12 6 2 5 4 10 9 7 1 6 3 12 14 11 2 5 4 16 8

(d,n)=(6,6) [14-15]

Chi ($P_2 \square C_{120}$) ≤ 15

S=(6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 8 8 8)

14 4 11 5 2 12 10 3 9 6 1 11 8 4 14 5 2 9 7 3 8 6 1 14 15 4 11 5 2 8 10 3
14 6 1 7 12 4 13 5 2 9 11 3 12 6 1 13 15 4 11 5 2 8 10 3 9 6 1 11 12 4 14 5
2 13 7 3 8 6 1 14 9 4 7 5 2 12 10 3 9 6 1 7 8 4 13 5 2 9 11 3 8 6 1 10
15 4 7 5 2 12 14 3 9 6 1 7 8 4 10 5 2 9 11 3 12 6 1 13

9 3 7 6 1 8 15 4 13 5 2 7 12 3 10 6 1 13 11 4 12 5 2 10 9 3 7 6 1 12 13 4
9 5 2 11 8 3 10 6 1 14 7 4 8 5 2 10 9 3 7 6 1 12 14 4 13 5 2 7 8 3 10 6
1 9 11 4 12 5 2 10 15 3 11 6 1 8 13 4 14 5 2 11 12 3 10 6 1 14 7 4 12 5 2 13
9 3 11 6 1 8 10 4 13 5 2 11 12 3 14 6 1 15 7 4 8 5 2 10

(d,n)=(6,12) [12]

Chi ($P_2 \square C_{12}$) =12

S=(6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6)

12 9 3 5 4 2 11 1 6 10 7 8
11 1 6 10 7 8 12 9 3 5 4 2

If $n \geq 2d$, then

$$f(0,i) = (i \bmod 2d) + 1, f(1,i) = ((i + d) \bmod 2d) + 1, i \in \mathbb{Z},$$

is a (d,n) – packing $2d$ – coloring of $P_2 \square \mathbb{Z}$.