Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje in matematiko

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matevž Črepnjak

Študijsko gradivo pri predmetu

Matrični račun

Maribor 2019

Predgovor

Zbrano gradivo je nastalo pa podlagi nalog, ki smo jih na vajah v preteklosti reševali pri predmetu Matrični račun. Te so se skozi leta spreminjale, saj so skozi leta nastajale nove naloge, vključevale pa so se tudi izpitne naloge iz preteklih let.

To gradivo je nastala predvsem z idejo izboljšanja študijskega procesa in kvalitete vaj pri predmetu Matrični račun. Omeniti velja, da zbrano gradivo sistematično sledi predavanjem prof. dr. Iztoka Baniča pri tem predmetu.

To zbrano gradivo naj bo le vodilo pri študiju predmeta Matrični račun. Za poglobitev in utrditev znanja pri tem predmetu priporočam še naslednje zbirke nalog:

- Kolar, Zgrablić: *Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre*, Pedagoška fakulteta, Ljubljana, 1996,

- Dobovišek, Kobal, Magajna: *Naloge iz Algebre I*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2011,

- Kramar: *Rešene naloge iz Linearne algebre*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1989.

V tem zbranem gradivu se pojavi tudi kakšna naloga iz omenjenih zbirk. Na koncu vsakega razdelka je vključenih nekaj izpitnih nalog, ki so namenjene samostojnemu utrjevanju snovi. V tretjem poglavju je vključenih nekaj izpitov iz preteklih let.

Matevž Črepnjak

Kazalo

Poglavje 1

Vektorji

1.1 Linearna kombinacija vektorjev

1. Vektor $\vec{a} = 7\vec{i} - 14\vec{j}$ zapiši kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{x} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ in $\vec{y} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

2. Ali so vektorji

   (a) $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$, $\vec{c} = (5, 1, -2)$,

   (b) $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (-2, -1, 0)$,

   linearno neodvisni? Utemelji.

3. Podan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$ ter $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

   (a) Vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC}$ in $\overrightarrow{FD}$ izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) V kolikšnem razmerju deli vektor $\overrightarrow{AE}$ vektor $\overrightarrow{FC}$?

   (c) V kolikšnem razmerju deli vektor $\overrightarrow{FC}$ vektor $\overrightarrow{AE}$?

4. Dan je romb $ABCD$, kjer je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Točka E deli BC v razmerju $1 : 1$, točka F pa deli CD v razmerju $1 : 3$. V kolikšnem razmerju EF deli AC?

5. S pomočjo vektorjev dokaži, da se v paralelogramu diagonali razpolavljata.

6. Podan je trikotnik ABC ter $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

(a) Izrazi vse težiščnice trikotnika z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

(b) Pokaži, da težišče trikotnika razdeli težiščnice trikotnika v razmerju $2:1$.

7. Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ določata trikotnik. V kolikšnem razmerju simetrala kota, ki ga določata $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, razdeli nasprotno stranico?

8. Podan je paralelogram $ABCD$. Točka T_1 deli stranico AB v razmerju $1:2$, točka T_2 deli stranico CD v razmerju $1:3$.

   (a) V kolikšnem razmerju T_1T_2 deli BD?

   (b) Ali točka S, $\{S\} = T_1T_2 \cap BD$, leži na AC? Utemelji!

9. Podan je enakokrak trapez $ABCD$ s podatki $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $|BC| = |CD| = |AD| = 2$. Na stranici AB naj bo enotski vektor $\overrightarrow{m}$, na stranici AD enotski vektor $\overrightarrow{n}$. Točka M naj bo razpolovišče daljice AB, točka N pa naj deli daljico CD v razmerju $|CN| : |ND| = 2:1$. Z vektorjema $\overrightarrow{m}$ in $\overrightarrow{n}$ izrazi vektorje $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AN}$ in $\overrightarrow{MN}$.

10. Podan je paralelogram $ABCD$ kjer je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$. Točka M leži na daljici AB tako, da je $|AM| : |MB| = 2:3$, in točka N leži na daljici CD, da $|CN| : |ND| = 1:2$. Naj bo S presek daljic MN in AC.

    (a) V kolikšnem razmerju deli točka S daljico AC?

    (b) V kolikšnem razmerju deli točka S daljico MN?

Naloge za samostojno delo:

1. Dan je paralelogram $ABCD$, kjer je $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AD}$. Točka E deli BC v razmerju $3:2$, točka F pa deli CD v razmerju $1:2$.

   (a) V kolikšnem razmerju BF deli DE?

   (b) Izračunaj kot med AE in AF, če je $|\vec{b}| = 5|\vec{a}|$ in je kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{4}$.

1.2 Skalarni, vektorski in mešani produkt

1. Izračunaj dolžino vektorjev $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, skalarni produkt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ ter kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

2. Med enotskima vektorjema $\overrightarrow{p}$ in $\overrightarrow{q}$ je kot $\frac{\pi}{3}$. Določi kot med vektorjema $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ in $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$, dolžino projekcije vektorja $\overrightarrow{a}$ na vektor $\overrightarrow{b}$ in ploščino paralelograma, napetega med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

3. Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ imata enako dolžino, vektorja $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{q} = 5\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ pa sta pravokotna. Določi kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

4. Paralelogram je določen z vektorjema $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$, kjer je $|\overrightarrow{a}| = 5$, $|\overrightarrow{b}| = 2$ in je kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ enak $\frac{\pi}{4}$. Izračunaj ploščino paralelograma.

5. Dokaži, da je paralelogram romb natanko tedaj, ko se njegovi diagonali sekata pod pravim kotom.

6. Naj za vektorje $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$ velja $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Dokaži
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = -\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2\right).$$

7. Izračunaj kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, če velja, da je vektor $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ pravokoten na vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, vektor $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ pa je pravokoten na vektor $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

8. Dan je kvader $ABCDA'B'C'D'$. Naj bo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ in $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ ter naj velja, da je $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ in $|\vec{c}| = 2|\vec{a}|$. Izračunaj kot med
   (a) telesno diagonalo in stranico AB,
   (b) telesno diagonalo in AD'.

9. Naj bodo $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ standardni bazni vektorji $\mathbb{R}^3$. Izračunaj
$$\left(\left(\left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}\right) \times \overrightarrow{j}\right) \times \overrightarrow{j}\right) \times \overrightarrow{i}.$$

10. Paralelogram v $\mathbb{R}^3$ določata diagonali $\overrightarrow{e} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$. Izračunaj ploščino paralelograma.

11. Naj bodo $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ paroma nekolinearni vektorji v $\mathbb{R}^3$. Dokaži, da je $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ natanko tedaj, ko velja $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

12. Naj bosta $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$. Reši enačbo
$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}.$$

13. Naj bosta $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisna vektorja. Reši enačbo
$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x})(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}.$$

14. Izračunaj volumen paralelipipeda, ki ga določajo vektorji $\overrightarrow{a} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{b} = (-1,2,0)$ in $\overrightarrow{c} = (0,1,1)$.

15. Izračunaj volumen tristrane piramide, ki jo določajo točke $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(1,0,0)$ in $D(-3,1,1)$.

16. Izračunaj $(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}, 3\overrightarrow{c} + 4\overrightarrow{a})$, če je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 1$.

17. Dokaži, da so vektorji $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$ kolinearni natanko tedaj, ko so vektorji $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ koplanarni.

Naloge za samostojno delo:

1. Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ in $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$. Ali je
$$\left(\vec{b} + 3\vec{c}\right) \cdot \left((\vec{a} - 3\vec{c}) \times \left(3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}\right)\right) \neq 0?$$
Utemelji!

2. Naj bosta $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$. Reši enačbo
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{x} = \vec{b}.$$

3. Izračunaj volumen in površino paralelepipeda, določenega s točkami $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,1)$ in $D(2,0,1)$.

1.3 Premice in ravnine v prostoru

1. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točki $A(0,1,-2)$ in $B(1,0,1)$, v parametrični in kanonski obliki. Ali je na tej premici točka $T_1(1,2,1)$ oziroma $T_2(2,-1,4)$? Nadalje, izračunaj razdaljo od te premice do točke T_1 oziroma T_2.

2. Premica p je podana z enačbo $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-6}$ in premica q je podana z enačbo $\frac{x+3}{2} = y+1 = \frac{z}{-2}$. Izračunaj presečišče med premicama p in q. Izračunaj še enačbi premic, ki jih določata simetrali kotov med med premicama p in q.

3. Premica p je podana z enačbo $\frac{x-2}{3} = \frac{1-y}{5} = \frac{z+2}{2}$ in premica q je podana z enačbo $3x = -2y = 6z$.

   (a) Izračunaj razdaljo med premicama p in q.

   (b) Zapiši enačbo premice, ki seka premici p in q pod pravim kotom.

4. Zapiši enačbo ravnine, ki poteka skozi točke $A(2,1,0)$, $B(-1,0,1)$ in $C(0,2,2)$, v splošni in odsekovni obliki. Ali katera od točk $T_1(2,0,4)$ in $T_2(4,0,-2)$ ne leži na tej ravnini? Če katera od teh točk ne leži na ravnini, izračunaj oddaljenost od te točke do ravnine.

5. Zapiši enačbo ravnine Π, ki je določena s premico p z enačbo $x-2 = 1-z$, $y=1$ in točko $A(0,3,1)$.

6. Določi presek ravnin, ki sta podani z enačbama $3x+3y-z=-1$ in $x-y+z=3$.

7. Določi presek ravnin, ki so podane z enačbami $2x-4y+3z=1$, $x-2y+4z=3$ in $3x-y+5z=2$.

8. Zapiši enačbo ravnine Π, ki vsebuje premico p z enačbo $x = y-1 = \frac{z}{2}$ in je pravokotna na ravnino Σ z enačbo $x+z=0$. Izračunaj še v katerih točkah seka ravnina Π koordinatne osi.

9. Poišči pravokotno projekcijo premice p, ki je podana z enačbo $x=2y=z$, na ravnino Π, ki je podana z enačbo $x+y-z=1$. Pod katerim kotom premica p seka ravnino Π?

10. Med točkami, ki so enako oddaljene od točk $A(3,4,1)$ in $B(-1,0,5)$, poišči tisto, ki je najbližja točki $C(6,5,-4)$.

11. Poišči enačbo premice r, ki poteka skozi točko $T(0,-1,1)$ ter seka premico p z enačbo $\frac{x+3}{2} = 2-y = z$ in premico q z enačbo $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = z-1$.

12. Zapiši enačbo premice, ki je pravokotna na premico p z enačbo $x-1 = \frac{y}{2} = z-1$ in poteka skozi točko $T(3,0,3)$.

13. Med premicami na ravnini Π z enačbo $x-2y+2z = 18$, ki potekajo skozi točko $T(4, y_0, 5)$ določi
    - (a) enačbo premice p, ki seka premico p' z enačbo $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$;
    - (b) enačbo premice q, ki vzporedna z ravnino Σ z enačbo $y = 0$;
    - (c) premico r, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču.

14. Izpelji vse formule za računanje razdalj med točkami, premicami in ravninami v prostoru.

Naloge za samostojno delo:

1. Ravnina Π je podana z enačbo $x-z = 1$, ravnina Σ pa z enačbo $x-2y+3z = 2$.
    - (a) Izračunaj razdaljo med ravnino Π in točko $T(3,1,1)$.
    - (b) Izračunaj enačbo premice, ki poteka skozi točko $T(3,1,1)$ in je vzporedna z ravninama Π in Σ.

2. Premica p je določena s presekom ravnin z enačbama $x = z$ in $x-y = 2$.
    - (a) Zapiši enačbo premice p v parametrični in kanonski obliki.
    - (b) Določi premico q, ki seka premico p pod pravim kotom in poteka skozi točko $(0,1,0)$.

3. Premica p je podana z enačbo $2-2x = y = z$, ravnina Π pa z enačbo $x+y-z = 3$. Poišči $p \cap \Pi$ in med vsemi premicami na ravnini Π, ki sekajo premico p, zapiši enačbo tiste, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču.

Poglavje 2

Matrike

2.1 Osnovno o matrikah

1. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Če obstaja, izračunaj $A+B$, C^T+2D, AB, BC, CB, CD, DC, BB^T, B^TB, D^TA.

2. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Nato dokaži, da vse take matrike komutirajo med seboj.

3. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko zapisati v obliki $\alpha I + \beta A$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Naj bo $X \in M_2(\mathbb{R})$. Reši enačbo $X^2 = I$.

5. Za poljubno naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Za poljubno naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Za poljubno naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & \sin x & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Za poljubno naravno število n izračunaj A^n, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Za poljubno naravno število n izračunaj A^n, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Izračunaj inverz od matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Dokaži, če sta A in B obrnljivi matriki, ki komutirata, potem tudi matrike A, B, A^{-1}, B^{-1} paroma komutirajo.

12. Reši spodnje primere.

    (a) Zapiši splošna primera realne simetrične in poševno simetrične matrike reda 3.

    (b) Ali so naslednje matrike simetrične oziroma poševno simetrične: $A + A^T, A - A^T, A^T A$?

    (c) Naj bosta A in B simetrični matriki. Ali je $AB - BA$ simetrična oziroma poševno simetrična matrika?

    Spomnimo naslednje: matrika A je simetrična, če je $A^T = A$, in je poševno simetrična, če je $A^T = -A$.

13. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotentni matriki, ki komutirata. Dokaži, da sta potem $A+B$ in AB tudi nilpotentni matriki.

    (Opomba: matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je nilpotentna, če obstaja $m \in \mathbb{N}$, da velja $A^m = 0$.)

14. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotentna matrika, za katero velja $A^{m+1} = 0$ in $A^m \neq 0$, kjer je $m \in \mathbb{N}$. Pokaži, da je $I - A$ obrnljiva matrika in velja $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^m$.

15. Pravimo, da je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna, če velja $AA^T = A^T A = I$.

    (a) Preveri, da je
    $$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
    ortogonalna matrika.

    (b) Poišči vse ortogonalne matrike reda 2.

    (c) Pokaži, da je produkt ortogonalnih matrik ponovno ortogonalna matrika.

16. Za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiramo njeno sled s predpisom
    $$\mathrm{sled}(A) = a_{1\,1} + a_{2\,2} + \ldots + a_{n\,n}.$$

    (a) Dokaži, da za poljubni matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja
    $$\mathrm{sled}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{sled}(A) + \beta\,\mathrm{sled}(B)$$
    in
    $$\mathrm{sled}(AB) = \mathrm{sled}(BA).$$

    (b) Naj bo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ in naj bo B obrnljiva. Dokaži
    $$\mathrm{sled}(B^{-1}AB) = \mathrm{sled}(A).$$

    (c) Ali obstajata matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, da je $AB - BA = I$?

Naloge za samostojno delo:

1. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, katere vsi elementi so enaki 1 in naj bo $k \in \mathbb{N}$. Dokaži, da velja
   $$\left(\frac{1}{n}A\right)^k = \frac{1}{n}A\,.$$

2. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve.
   (a) Če je $\mathrm{sled}(A) \neq 0$, tedaj je A obrnljiva matrika.
   (b) Če sta A in B obrnljivi matriki, tedaj je tudi $A + B$ obrnljiva matrika.
   (c) Če je $A + B$ obrnljiva matrika, tedaj je
   $$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

2.2 Determinanta matrike

1. Dane so permutacije

   (a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$,

   (b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

   (c) $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

   Permutacije π_1, π_2 in π_3 zapiši kot produkt transpozicij in določi njihovo parnost.

2. Samo z uporabo definicije determinante izračunaj

   (a) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

   (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{vmatrix}$,

   Opomba: vsa števila, ki nastopajo v zgornjih determinantah, so realna števila.

3. S pomočjo razvoja determinante po vrstico oz stolpcu izračunaj naslednje determinante

   (a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$,

   (b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} -y & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_2 & -y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & -y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & -y \end{vmatrix}$.

Opomba: vsa števila, ki nastopajo v 3d, so realna števila.

4. Števila 28765, 10131, 98571, 84590, 50413 so deljiva z 11. Dokaži, da je tudi spodnja determinanta deljiva z 11.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

5. S pomočjo Gaussove eliminacije izračunaj naslednje determinante

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$,

(c) $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & y_1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 & y_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & y_n \end{vmatrix}.$$

Opomba: vsa števila, ki nastopajo v 5c, so realna števila.

6. Izračunaj splošna člena zaporedij, ki sta podani rekurzivno na naslednji način

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

7. Izračunaj naslednje determinante reda $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 6 \end{vmatrix},$$

   (b) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

   (c) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

8. Izračunaj naslednje determinante reda $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 0 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 0 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$, kjer je $n > 4$,

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & -2 & -2 & \dots & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & \dots & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

9. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto reda $2n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a & b & b & \dots & b & b \\ 0 & a & \dots & a & a & b & b & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & a & b & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & b & a & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & b & b & a & a & \dots & a & 0 \\ b & b & \dots & b & b & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

Naloge za samostojno delo:

1. Naj bodo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_4(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Sistemi linearnih enačb

1. Določi rang matrike

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 10 \end{bmatrix}$.

2. V odvisnosti od realnega parametra a določi rang matrike

   (a) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 1 \\ -2 & 0 & -2a & 1 \end{bmatrix}$.

3. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x + z + u &= 2 \\ x + ay + z + 2u &= 3 - a \\ -2x - (a+1)z - u &= a - 4 \\ ay + 2u &= 2 - a. \end{aligned}$$

4. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

   Nalogo reši s pomočjo Cramerjevega pravila.

5. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax - 4y - 3z &= a \\ x - ay - 6z &= 4 \\ 4x + az &= 0. \end{aligned}$$

6. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} (a-1)x + 2y + z &= 1 \\ x + 2y + (a+1)z &= a \\ x + 2y + z &= 2a. \end{aligned}$$

7. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} 2ax + y - z &= a \\ 2x - ay + 3z &= 1 \\ 4x + 2y - 2az &= 2. \end{aligned}$$

8. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ x - ay + z &= 2 \\ 2x + y - az &= 0. \end{aligned}$$

9. V odvisnosti od realnih parametrov a in b reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= a \\ x + by + az &= 1. \end{aligned}$$

10. Za katera realna števila a in b ima sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} ax + y + bw &= 0 \\ x + ay + z &= 1 \\ z + w &= 0 \\ bx + y + aw &= b \end{aligned}$$

parametrično rešitev? V teh primerih rešitev tudi poišči.

Naloge za samostojno delo:

1. V odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + 2y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 0 \\ x - 2y + az &= a. \end{aligned}$$

2. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax - y + z &= 1 \\ -x + ay + z &= 1 \\ -2y + az &= -a. \end{aligned}$$

3. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 0 \\ -2x + ay + z &= a \\ 2x - y + az &= a^2. \end{aligned}$$

2.4 Inverzna matrika

1. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
Izračunaj A^{-1} s pomočjo prirejenke, B^{-1} pa s pomočjo linearnega sistema.

2. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Izračunaj A^{-1} s pomočjo prirejenke, B^{-1} pa s pomočjo linearnega sistema.

3. Reši matrično enačbo
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Reši matrično enačbo
$$2AX - 18A = BX.$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Reši matrično enačbo
$$(-X^T B)^T + AX = I^2,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Reši matrično enačbo
$$(XA)^T - 2A = (2X - B)^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. V odvisnosti od realnega parametra a reši matričbo enačbo
$$AX = X + B^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Naj bo n liho število in naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ poševno simetrična matrika. Ali je A obrnljiva matrika?

9. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika. Dokaži, da je $\det(\tilde{A}) = (\det A)^{n-1}$.

10. Matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sta podobni, če obstaja obrnljiva matrika P, da velja $B = P^{-1}AP$.

    Dokaži, če sta matriki A in B podobni, tedaj je $\det(A) = \det(B)$.

Naloge za samostojno delo:

1. Reši matrično enačbo
$$(AX + B^T)^T = (BX + A)^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Reši matrično enačbo
$$XA = 2X + B^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Poišči vsa realna števila a in b za katera obstaja inverz matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,
$$A = \begin{bmatrix} a+b & b-1 & b-1 & \dots & b-1 & b-1 & b-1 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ -ab & -ab & -ab & \dots & -ab & -ab & a \end{bmatrix}.$$

Poglavje 3

Primeri preteklih izpitov

V tem poglavju je vključenih nekaj izpitov iz preteklih let. Nekaj izpitov najdete tudi na spletni strani asistenta.

Izpit pri predmetu Matrični račun
27. 1. 2017

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljeni so listi s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. **[20]** Izračunaj volumen in površino tristrane piramide, ki je določena s točkami $A(1,0,1)$, $B(2,1,1)$, $C(1,0,2)$ in $D(0,1,1)$ v $\mathbb{R}^3$.
2. **[20]** Dana sta ravnina $\Pi : 2x+y-z=3$ in premica $p : \frac{x-1}{3} = 2-z$, $y = -1$.
   (a) Dokaži, da se ravnina Π in premica p sekata in izračunaj kot med njima.
   (b) Določi enačbo ravnine, ki vsebuje premico p in seka ravnino Π pod pravim kotom.
3. **[20]** V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax - y + 2z &= a \\ 2x + y - 2z &= -1 \\ -y + az &= a. \end{aligned}$$
4. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & n \end{bmatrix}.$$
5. **[20]** Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži ali ovrzi:
   (a) če je A simetrična, tedaj je obrnljiva;
   (b) če je A obrnljiva, tedaj je tudi njena prirejenka obrnljiva.

Izpit pri predmetu Matrični račun
10. 2. 2017

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljeni so listi s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[20]** Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno nedvisna vektorja v $\mathbb{R}^3$. Reši vektorsko enačbo
$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}.$$

2. **[20]** Dana sta ravnina $\Pi : x - 2z = 10$ in točka $T(2, 1, 1)$.
   (a) Poišči točko na ravnini Π, ki je najbližja točki T.
   (b) Poišči premico, ki je vzporedna z ravnino Π in poteka skozi točko T.

3. **[20]** Reši matrično enačbo
$$A + XB = B^T - XA,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$, A je različna od ničelne matrike. Dokaži ali ovrzi:
   (a) če je A nilpotentna matrika, tedaj je strogo zgornje trikotna matrika;
   (b) če je A strogo zgornje trikotna matrika, tedaj je nilpotentna matrika.

Izpit pri predmetu Matrični račun
22. 6. 2017

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljeni so listi s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. **[20]** Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ in $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$. Ali je
$$(\vec{a} + 3\vec{c}) \cdot ((\vec{a} - 3\vec{c}) \times (3\vec{a} + 2\vec{a} + \vec{c})) \neq 0?$$

2. **[20]** Dani sta premici $p : \frac{x-7}{3} = 3 - y,\ z = 2$ in $q : 2x - 4 = y = 2z$.
   (a) Preveri, da se premici p in q sekata ter izračunaj kot med njima.
   (b) Določi enačbo premice, ki pravokotno seka premici p in q.

3. **[20]** Reši matrično enačbo
$$(-X^T B)^T + AX = I^2,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. **[20]** V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax - y + z &= 1 \\ -x + ay + z &= 1 \\ -2y + az &= -a. \end{aligned}$$

5. **[20]** Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži ali ovrzi:
   (a) če je vsota vseh elementov matrike A različna od 0 (torej $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \neq 0$), tedaj je matrika A obrnljiva;
   (b) če je A obrnljiva, tedaj je $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Izpit pri predmetu Matrični račun
31. 8. 2017

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljeni so listi s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

1. **[20]** Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno nedvisna vektorja v $\mathbb{R}^3$. Reši vektorsko enačbo
$$\vec{x} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a}.$$

2. **[20]** Dana sta ravnina $\Pi : x - y + 3z = 10$ in točka $T(0, 1, 1)$.
   (a) Izračunaj oddaljenost od točke T do ravnine Π.
   (b) Poišči premico, ki leži na ravnini Π in vsebuje pravokotno projekcijo točke T na ravnino Π.

3. **[20]** Reši matrično enačbo
$$2X^T - B = (XA - A)^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je podana takole
$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^i & ; \ 1 \leq i, j \leq n, \ i = j \\ 1 & ; \ 2 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ (-1)^j \cdot j & ; \ i = 1, \ 2 \leq j \leq n \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}.$$
Izračunaj determinanto matrike A.

5. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži ali ovrzi:
   (a) če je A simetrična matrika, tedaj je A obrnljiva matrika;
   (b) če je A poševno simetrična matrika, tedaj je A^{2017} tudi poševno simetrična matrika.

Izpit pri predmetu Matrični račun
5. 2. 2018

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljeni so listi s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. **[20]** Naj bosta $\vec{p}$ in $\vec{q}$ enotska vektorja iz $\mathbb{R}^3$. Nadalje, naj velja, da se $8\vec{p} + 7\vec{q}$ in $2\vec{p} - 3\vec{q}$ sekata pod pravim kotom. Izračunaj kot med vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{q}$.

2. **[20]** Premica p je določena s presekom ravnin $x - y = 0$ in $x - 2z = 2$.
   (a) Zapiši enačbo premice p v parametrični in kanonski obliki.
   (b) Določi premico q, ki seka premico p pod pravim kotom in poteka skozi točko $T(0, 0, 1)$.

3. **[20]** Reši matrično enačbo
$$(XA)^T - 2A = (2X - B)^T,$$
   kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. **[20]** Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži ali ovrzi:
   (a) $\operatorname{sled}(AB^T) = \operatorname{sled}(BA^T)$,
   (b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Izpit pri predmetu Matrični račun
19. 2. 2018

Navodila: Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Piši čitljivo, vse odgovore natančno utemelji in jih nedvoumno podaj. Dovoljeni so listi s formulami in priročnik, rešene naloge so prepovedane. Čas reševanja je 120 minut.

---

1. **[20]** Dokaži, da za poljubna vektorja $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ velja neenakost
$$||\vec{p}+\vec{q}|| \cdot ||\vec{p}-\vec{q}|| \leq ||\vec{p}||^2 + ||\vec{q}||^2.$$

2. **[20]** Dana je premica $p : \frac{2-x}{2} = y,\ z = 2$ in ravnina $\Pi\ :\ x+2y-2z = 2$.
   (a) Izračunaj razdaljo med p in Π.
   (b) Določi ravnino Σ, ki je vzporedna s premico p in seka ravnino Π pod pravim kotom ter vsebuje točko $T(0,1,0)$.

3. **[20]** V odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ obravnavaj sistem enačb
$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ -x + ay + 2z &= 1 \\ x - 2y + z &= a. \end{aligned}$$

4. **[20]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Poišči vsa realna števila a in b za katera obstaja inverz matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,
$$A = \begin{bmatrix} a+b & b-1 & b-1 & \dots & b-1 & b-1 & b-1 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ -ab & -ab & -ab & \dots & -ab & -ab & a \end{bmatrix}.$$
   V teh primerih inverz tudi poišči.

5. **[20]** Naj bosta $A, B \in M_4(\mathbb{R})$, kjer A simetrična in B antisimetrična matrika. Dokaži ali ovrzi:
   (a) $A - B$ je simetrična matrika;
   (b) $\mathrm{sled}(AB) = 0$.